QUESTIONI DI LOGICA I

Dalla Logica Formale all’Ontologia Formale

Parte II:
Cenni di logica delle proposizioni e dei predicati

Schemi ad Uso degli Studenti
Roma 2012-13

6. Sfondo storico: epistemologia e ontologia delle scienze moderne

6.1. Oggetto Fenomenico delle Scienze *vs.* Oggetto Ontologico della Filosofia (*FNS cap. 0)*

- → Difficoltà per l'uomo moderno di definire rigorosamente **l'oggetto dell'ontologia** generale e delle ontologie speciali in riferimento all'**oggetto fenomenico** delle scienze.
- Centralità della **questione galileiana** nella storia dell'epistemologia moderna: dal concetto **classico di scienza** (*cognitio certa per causas*, relazioni che determinano l'esistenza naturale di enti (sostanze e/o eventi) al concetto **moderno di scienza** (*cognitio certa per leges*, relazioni che determinano l'esistenza logica (deducibilità/predicibilità) di fenomeni (quantità misurabili)).

6.2. La questione galileiana

- Errore iniziale di Galilei: rivendicare il carattere **apodittico (assoluto: verità premesse → validità deduzioni)** delle dimostrazioni della scienza fisico-matematica intesa come ontologia adeguata dell'ente fisico (= essenzialismo neo-platonico *vs*. naturalismo neo-aritotelico). Fisica = **via parallela alla fede** per conoscere il pensiero di Dio ("Dio ha scritto il libro della natura in termini matematici).
- Conflitto con la Chiesa → Bellarmino: carattere **ipotetico (relativo: validità deduzioni indipendente dalla verità premesse)** delle dimostrazioni della scienza fisico-matematica (i medesimi fenomeni possono essere spiegati con differenti ipotesi).
- Questione galileiana: falsa interpretazione delle ipotesi come **"finzioni per salvare i fenomeni"** → reazione dei Galilei → processo e condanna di Galilei.
- Rivendicazione del carattere **apodittico** della scienza fisico-matematica moderna post-galileiana:

1. **Essenzialismo:** Cartesio, Leibniz, Spinoza.
→ **Evidenza** come criterio di verità
2. **Fenomenismo:** Newton, Kant.

- → **Trascendentale classico** (essere = fondamento della verità → "enunciato evidente perché vero) *vs.* **trascendentale moderno** (coscienza = fondamento della verità → "enunciato vero perché evidente").

6.3. Nascita del metodo ipotetico-deduttivo (*FNS* capp. 3-4)

- Scoperta delle **geometrie non-euclidee** (Lobacevskji) → fine del principio di evidenza come criterio di verità apodittiche → carattere ipotetico delle teorie matematiche → **assiomatizzazione** delle matematiche → matematiche come **teorie formali** (scienza delle relazioni e non delle quantità: Riemann).

«Lobacevskji viene considerato "il Copernico della geometria" come colui che ha rivoluzionato questo campo della matematica creando un'intera branca completamente nuova (…) mostrando **come la geometria euclidea non fosse quella scienza esatta**

depositaria di verità assolute quale era stata quella precedentemente considerata. In un certo senso, possiamo affermare che la scoperta della geometria non-euclidea inferse un colpo mortale alla filosofia kantiana, paragonabile alle conseguenze che la scoperta delle grandezze incommensurabili ebbe per il pensiero pitagorico. L'opera di Lobacevskji rese necessario **modificare radicalmente le concezioni fondamentali circa la natura della matematica**» (Boyer 1968, 621s. Corsivi nostri).

- → Nascita del metodo **ipotetico-deduttivo** → teorie matematiche come **sistemi formali** passibili di diverse **interpretazioni** (= **modelli**) nell'uso applicato delle matematiche alle varie scienze (naturali, umane, tecnologiche) in base a diversi **assiomi di misura** mediante cui dare **un contenuto (significato) empirico** alle teorie formali → controllo empirico delle teorie: **criterio di falsificazione** e non di verificazione delle teorie scientifiche.
- → **Separazione assoluta** fra **forma logica** e **contenuto empirico** delle teorie scientifiche moderne basate sul metodo ipotetico-deduttivo.

  «Di fatto si riconobbe che la validità della deduzione matematica non dipende in alcuna maniera dal particolare significato che può essere associato ai termini o alle espressioni contenute nei postulati. Si vide così che la matematica è molto più astratta e formale di quanto non si supponesse tradizionalmente: più astratta perché, in linea di principio **si possono fare**

affermazioni matematiche su cose assolutamente qualsiasi, anziché su insiemi intrinsecamente circoscritti di oggetti o di proprietà di oggetti (le proprietà quantitative, *N.d.R.*), perché la validità delle dimostrazioni matematiche **riposa sulla struttura delle affermazioni, piuttosto che sulla natura particolare del loro contenuto.** (…) Ripetiamo che l'unica questione riguardante il matematico puro (in quanto distinto dallo scienziato che usa la matematica per studiare un oggetto particolare) non è se i postulati che egli ammette o le conclusioni che egli trae dai primi sono veri, ma se le conclusioni avanzate siano, di fatto, **le conclusioni logiche necessarie** delle ipotesi da cui è partito (…). Fintantoché abbiamo a che fare col compito essenzialmente matematico di esplorare le relazioni puramente logiche di dipendenza tra le varie affermazioni, i significati familiari dei termini primitivi (i termini con cui sono costruiti gli assiomi di partenza, *N.d.R.*) devono essere ignorati e gli unici "significati" associati ad essi sono quelli assegnati dagli assiomi in cui entrano. Questo è il significato del famoso epigramma di Russell: la matematica pura è quella scienza in cui non sappiamo di cosa stiamo parlando o se ciò che stiamo dicendo è vero (Nagel & Newman 1993, 23s.).

6.4. Logica formale, ontologia formale, ontologia formalizzata

- Lo sviluppo della logica e dell'epistemologia delle scienze moderne → progressiva separazione della **forma** dal **contenuto extra-linguistico** delle espressioni linguistiche → sviluppo di una logica e di un'epistemolgia inadeguate a svariati usi del linguaggio in forme non-scientifiche di comunicazione fra soggetti umani →
- → **Reazione della scuola fenomenologica:** carattere intenzionale (sempre legato a un contenuto) di ogni atto di pensiero e/o di ogni espressione linguistica significativa →

contrapposizione fra **logica formale** e **logica materiale** o "logica dei contenuti" (*Inhaltlogik*) (Brentano, Husserl).

- → **Reazione della scuola semiotica:** L'analisi logica o metalinguistica di un linguaggio inteso come insieme di segni dotati di senso, può essere effettuata considerando **tre classi di relazioni** che le varie parti (parole, frasi, discorsi, etc.) possono avere:

  1. **Con il mittente o con il ricevente** di una comunicazione linguistica
  2. **Con altre parti del linguaggio**
  3. **Con gli oggetti** linguistici o extra–linguistici cui le parti del linguaggio si riferiscono

- Tripartizione della semiotica e della logica [C.W. Morris (1901-1979)]

  1. **Pragmatica:** studio dei linguaggi in riferimento alle relazioni dei diversi segni con gli agenti della comunicazione ed alla capacità del linguaggio di modificare i comportamenti (p.es., pubblicità, retorica,etc.). → **Pragmatismo:** se utilità pratica **unico criterio** validità enunciati scientifici [C.S. Peirce (1839-1914)].

2. **Sintattica:** studio dei linguaggi in riferimento alle relazioni dei diversi segni linguistici fra di loro prescindendo sia dai contenuti che dagli agenti della comunicazione. **Sintattica o Logica formale:** parte della logica che studia la sintassi dei linguaggi. → **Formalismo**: se coerenza formale **unico criterio** validità enunciati scientifici [D. Hilbert (1862-1943)].

3. **Semantica:** studio dei linguaggi in riferimento alle relazioni dei diversi segni con i loro oggetti intra– o extra–linguistici (= referenti). **Semantica o Logica materiale o Logica dei contenuti**: parte della logica che studia la semantica dei linguaggi. → **Realismo:** se verità (adeguazione all'oggetto) dei linguaggi scientifici considerata fondamento della loro stessa coerenza formale.

- Generalmente nell'analisi logico formale delle teorie scientifiche basate sul metodo ipotetico-deduttivo, e quindi sulla distinzione fra **sistema formale** (=componente matematica) e sua **interpretazione empirica** (= componente empirica), si considerano esclusivamente le **ultime due classe di relazioni** (sintattiche e semantiche) che determinano forma e contenuto delle espressioni e delle argomentazioni delle teorie scientifiche. → Ciascuna teoria scientifica, allora, è intesa come **modello empirico** di una determinata teoria matematica formale.

- Quando nell'analisi logica dei linguaggi si tiene conto simultaneamente **di tutte e tre le classi di relazioni** che determinano la forma delle espressioni e delle argomentazioni corrette all'interno di ciascun linguaggio, non siamo più nell'ambito della logica formale (che si limita al solo studio sintattico e semantico), ma della **ontologia formale** → assenza della consapevolezza di questa distinzione nella logica classica pre-scientifica (p.es., aristotelica o scolastica).

- Riferimento dell'ontologia alla pragmatica deriva dal fatto che ogni linguaggio in quanto **sistema di rappresentazioni** è **ontologicamente neutro:** analisi logico-semantica sulla **verità** degli enunciati (*sentences*), sulla loro **soddisfacibilità** e sulla loro **referenza** ad oggetti, è analisi che permane a livello squisitamente **linguistico** → riferimento all'ente extra-linguistico (mentale, fisico…) non può trascendere il livello dell'**ipotesi**, come già Kant si accorse con la sua teoria dell'essere come **noumeno** rispetto ad un intelletto "rappresentazionale".

- → Nell’analisi ontologica, centralità dell’analisi dei **linguaggi ordinari** in quanto sono quelli usati dalle diverse comunità di agenti linguistici per interagire fra di loro e con il mondo naturale e culturale in cui sono inseriti.
- → Ontologia, come scienza dell’essere e delle sue diverse modalità ontologiche (=modi di esistere) e quindi di manifestarsi (= modi di essere conosciuto) e di esprimersi (= modi di essere espresso) **non può non far riferimento all’uomo e al suo pensiero** che diventa allora il ***locus metaphysicus*** per eccellenza come già Parmenide per primo si accorse
- → **Linguaggio delle teorie scientifiche,** in quanto prescinde dalla dimensione pragmatica ed espresso necessariamente in un linguaggio simbolico, è **ontologicamente neutro** → acquista un valore **ontologico solo quando divulgato** ovvero espresso in un **linguaggio ordinario** per modificare la mente degli agenti di una determinata comunità linguistica → loro modo di interagire con la realtà naturale e culturale in cui sono inseriti.

- Riferimento all’ente, insomma, ha senso solo quando dal piano delle rappresentazioni si passa a quello delle **azioni,** come già Aristotele per primo si accorse con la sua teoria dell’unità fra atto e oggetto intellettivo, nella sua teoria dell’intelletto come “atto”.
- → Linguaggio da sistema di rappresentazioni viene inteso come un insieme di **atti linguistici** di soggetti in relazione **attiva-passiva** (causale) fra di loro (comunicazione) e con oggetti del mondo (conoscenza). In questo senso il problema della referenza e della denotazione extra-linguistica degli **asserti** (*statements*) non può prescindere dalla dimensione **prammatica** del linguaggio (ontologia).
- In questo senso ogni linguaggio in quanto usato da una comunità linguistica è implicitamente un’ontologia → ogni comunità linguistica condivide oltre che determinate **categorie logico-grammaticali** del proprio linguaggio, anche determinate **categorie ontologiche** → senso del termine **ontologia** nelle analisi linguistiche della **scienza delle comunicazioni** e dell’**informatica.**
- → L’ontologia implicita può essere resa esplicita in una determinata filosofia ovvero in una vera e propria **teoria ontologica** (p.es., le diverse metafisiche nelle diverse culture o la metafisica stessa in quanto scienza). In quanto tali, le teorie ontologiche sono

espresse nei **linguaggi naturali** di cui sono in qualche modo primariamente costituite e possono essere oggetto di **analisi logica** sintattica e semantica come qualsiasi altra teoria.

- E’ questo il senso del termine moderno di **ontologia formale** usato per la prima volta da Husserl nel senso di un’analisi secondo il **metodo fenomenologico** dell’epoché dei fondamenti della logica dal p.d.v. della soggettività trascendentale → analisi dell’atto di coscienza pre-rappresentazionale in quanto costitutivo dei contenuti della coscienza rappresentazionale. Tentativo di un’interpretazione realista dell’analisi ad opera di M. Scheler, J. Seifert, K. Woityla…

- Tentativo più significativo del XX secolo in campo scientifico (scienze cognitive) delle sviluppo di un’epistemologia realista che interpreta la conoscenza come **azione interiorizzata** è quello ad opera **dell’epistemologia e psicologia genetiche** ad opera di J. Piaget.

- L’analisi metalogica della sintassi e della semantica di una determinata ontologia può essere operata anche secondo i canoni della logica scientifica moderna → passaggio dal linguaggio naturale (**LN**) al linguaggio simbolico (**LS**) e quindi al linguaggio formalizzato della logica dei predicati (**L**) e del calcolo dei predicati (**C**) → ontologia formale nel senso dell'**ontologia formalizzata.** E' questo il senso in cui useremo noi la dizione "ontologia formale".

6.5. Diversi sensi e funzioni dell'ontologia formale

- Naturalmente l'esigenza di un'ontologia formale (il termine è di H. C. Wolff) è tipicamente **moderna**, legata alla rivisitazione leibniziana della logica in termini di *charachteristica universalis*, ovvero di:

  1. un universale **linguaggio simbolico** (*ars combinatoria*)
  2. un universale e completo **sistema di deduzione** (*calculus ratiocinator*)

- Applicabile sia al linguaggio matematico delle "nuove scienze" sia a quello ordinario della filosofia e della metafisica in particolare con una duplice funzione:

  1. Fornire un linguaggio **unico** e **univoco** perché simbolico a tutte le scienze per il dialogo interdisciplinare.

2. Fornire un linguaggio simbolico ed una **metodologia logica** per formalizzare le diverse ontologie del senso e del linguaggio comune.

- Questa impostazione “profetica” dell’ontologia formale in senso leibniziano è quanto oggi — grazie a tre secoli di ininterrotti progressi della logica e del calcolo formali — si può e si deve realizzare in una **cultura globale** come la nostra.

6.6. Definizione di ontologia formale

- «Un’ontologia formale è sia una teoria espressa in forma logica sia una teoria della struttura metafisica del mondo. Ciò che ne fa una teoria espressa in forma logica è il fatto che le differenti categorie ontologiche o modi di essere sono rappresentate in esse da differenti categorie logico-grammaticali» [CO, 1-2]. → Ontologia formale, costituita da:

1. **Grammatica ontologica**: ciò che determina come le diverse espressioni delle categorie logico-grammaticali di una lingua possono essere combinate per rappresentare aspetti ontologici diversi del mondo. → categorie **ontologiche**.

2. **Leggi ontologiche:** che determinano le formule valide di quella grammatica, cioè come le espressioni delle diverse categorie logico-grammaticali di una data ontologia **(=categorie ontologiche)** possono essere deduttivamente trasformate.

- Per ambedue queste funzioni, centralità della questione di come **il nesso della predicazione** viene interpretato nel sistema metafisico che una data ontologia formale rappresenta ← nesso della predicazione determina come le espressioni delle categorie logico- grammaticali di una teoria formalizzata possono essere validamente combinate e trasformate deduttivamente.

- 3 principali teorie della predicazione nella storia ↔ tre teorie degli universali (≠classi o insiemi =ciò che può essere predicato di un nome: Aristotele, *De Interpretatione*, 17a39):

1. **Nominalismo:** universali predicabili si riducono alle espressioni predicative di un dato linguaggio che *con le sue regole* determina le *condizioni di verità* dell'uso di quelle espressioni.
2. **Concettualismo:** universali predicabili sono espressioni di *concetti mentali* che determinano *verità/falsità* delle corrispondenti espressioni predicative.

3. **Realismo:** universali predicabili sono espressioni di *proprietà e relazioni* che esistono indipendentemente dalle capacità linguistiche o mentali:

    4. **Nel mondo logico** → realismo **logicista** (Platone, Frege)

    5. **Nel mondo fisico** → realismo **naturalista** di due tipi:

    6. **Atomismo:** senza generi naturali (Democrito, Wittengstein)

        7. **Essenzialismo:** con generi naturali (Aristotele, Tommaso, Neo-Scolastica, Cocchiarella)

- Ogni forma di naturalismo suppone tuttavia una qualche forma di concettualismo perché proprietà e relazioni **naturali** non possono essere come tali "i significati" o le intensioni delle corrispondenti espressioni predicative ma lo possono essere solo mediante i relativi concetti (Cfr. nozione di specie intenzionali come ***id quo*** *res intelligitur*) → problema della relazione fra concetti e proprietà e relazioni naturali che essi "significano".

7. ELEMENTI DI LOGICA DELLE PROPOSIZIONI [GA2, 13-64]

7.1. Cenni di sintassi

7.1.1. Linguaggi ordinari, simbolici, formali

- Ogni teoria scientifica (scienze naturali, matematiche, metafisiche) si presenta come un sistema di deduzioni valide, a partire da un insieme di assiomi (formule a zero premesse) e di regole di deduzione.
- Distinzione fra l'analisi grammaticale dei linguaggi ordinari e l'analisi logica dei linguaggi simbolici: distinzione fra **periodo/proposizione** *vs*. distinzione **proposizione semplice (categorica, atomica)/proposizione complessa** → = **formule** → distinzione fra formule del **linguaggio-oggetto** (= linguaggio simbolizzato della teoria oggetto dell'analisi) e formule del **metalinguaggio** (= linguaggio simbolizzato della teoria logica mediante cui si effettua l'analisi, generalmente quello della **teoria degli insiemi**).

- Nell’analisi logica ogni teoria o insieme di formule considerata come un sistema formale che sintatticamente significa un calcolo **CA** costituito da un linguaggio **L** e da un insieme di regole deduttive **D → CA = <L,D>**. **L** costituito da un alfabeto **A** e regole di formazione **F → L=<A,F>.**
- Il metalinguaggio in cui è costituito **CA** e dimostrati i metateoremi che riguardano le proprietà di **CA** è anch’esso un calcolo metateorico, con un suo linguaggio, un suo insieme di regole, un suo alfabeto.
- Il metalinguaggio della logica delle proposizioni è il calcolo proposizionale classico **k = <Lk,Dk>** con **L=<Ak,Fk>** (= cosiddetto calcolo dei sequenti di Gentzen: catene dimostrative come sequenza di formule).
- **Ak** di **k** costituito dai seguenti segni (teorici e metateorici)

Linguaggio	Metalinguaggio
a. Variabili proposizionali: *p,q,r,…*	**a. Metavariabili proposizionali:** α,β,γ,…
b. Costanti proposizionali: **¬,∧,∨,→,↔**	**b. Metacostanti proposizionali:** *non*,**□**:=(*et*,*vel*,⇒,⇔) *om*,*ex*
c. Segni ausiliari: (,)	**c. Segni ausiliari:** (,)

- L'insieme {**Fk**} delle regole di formazione di formule che appartengono all'insieme *X* delle formule ammissibili in **k** è costituito dalle clausole della seguente **definizione induttiva** delle formule per **k,** a partire da formule atomiche (base) verso formule molecolari (passo):

i. *p,q,r,…*sono formule (atomiche)

ii. se **a** è una formula allora ¬α è una formula

iii. se **a,b** sono formule, allora ogni **a□b** è una formula

iv. non ci sono altre formule
(le clausole ii-iv riguardano le formule molecolari di **k**)

- **Sequenza derivabile** "$X \vdash \alpha$"**:** sequenza di formule costituito da una formula sulla destra (consequente) e da un insieme (non ordinato) di formule *X* (anche infinito: antecedente) sulla sinistra del segno di derivazione "$\vdash$", ottenuta mediante l'applicazione di una delle insieme delle regole di derivazione {**Dk**}**.**
  - **Ordine delle assunzioni** nell'antecedente non è rilevante
  - **Ripetizione delle assunzioni** non è rilevante → vanno eliminate
  - Antecedenti di certe sequenze possono essere costruiti attraverso **operazioni insiemistiche** (p.es.: $X \cup Y$) → antecedente *X***a** sta per $X \cup \{\alpha\}$come pure antecedente **a** in $\alpha \vdash \beta$ sta per $\{\alpha\} \vdash \beta$.

7.1.2. Regole primitive di derivazione

1. Assunzione a zero premesse (**A**)

$$X \vdash \alpha \text{ (se } \alpha \in X)$$

Caso notevole: $\alpha \vdash \alpha$.

Tutti gli assiomi di una teoria sono assunzioni a zero premesse.

2. Introduzione congiunzione nel conseguente (**I**$\wedge$)

$$\frac{X \vdash \alpha \qquad Y \vdash \mathbf{b}}{X \cup Y \vdash \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}$$

3. Eliminazione della congiunzione nel conseguente (**E**$\wedge$)

$$\frac{X \vdash \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}}{X \vdash \mathbf{a} / \mathbf{b}}$$

4. Introduzione della disgiunzione nel conseguente (**I**$\vee$)

$$\frac{X \vdash \mathbf{a}}{X \vdash \mathbf{a} \vee \mathbf{b} / \mathbf{b} \vee \mathbf{a}}$$

5. Introduzione della disgiunzione nell'antecedente ($\vee$**I**)

$$\frac{X\alpha \vdash \mathbf{g} \qquad Y\beta \vdash \mathbf{g}}{X \cup Y\ \mathbf{a} \vee \mathbf{b} \vdash \mathbf{g}}$$

6. Introduzione dell'implicazione nel conseguente (**I**$\rightarrow$)

$$\frac{X\,\mathbf{a}\vdash\mathbf{b}}{X\vdash\mathbf{a}\rightarrow\mathbf{b}}$$

7. Modus Ponens (**MP**)

$$\frac{X\vdash\mathbf{a} \qquad Y\vdash\mathbf{a}\rightarrow\beta}{X\cup Y\vdash\mathbf{b}}$$

8. Negazione classica ($\neg$**k**)

$$X\neg\mathbf{a}\vdash\mathbf{b}$$

$$\frac{Y \neg \mathbf{a} \vdash \neg \beta}{X \cup Y \vdash \mathbf{a}}$$

Formalizzazione della classica argomentazione per assurdo perché ammette che, se un certo insieme ($X \cup Y$) di premesse che nega una certa conclusione (cioè: $\neg \mathbf{a}$) porta a contraddizione ($\mathbf{b} \wedge \neg \mathbf{b}$**,** allora vale $\mathbf{a}$.

7.1.3. Teorema di finitezza sintattica per il calcolo (k)[i]

$$X \vdash \mathbf{a} \Rightarrow (ex Z)(F(Z) \textit{ et } Z \subseteq X \textit{ et } Z \vdash \mathbf{a}$$

Se $\mathbf{a}$ è derivabile da X, allora esiste un sottoinsieme finito proprio o improprio di X tale che da esso è derivabile $\mathbf{a}$. Infatti, o la derivazione prende le mosse da **A** ($X \vdash \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \vdash \mathbf{a}$) o comunque da derivazioni con un numero finito di premesse, cosicché anche iterando si hanno comunque insiemi finiti di formule. Pertanto anche nell'ultima derivazione si avrà un numero finito di premesse.

Teorema importante perché se è vero che le nozioni sintattiche sono finitarie, mentre quelle semantiche non lo sono, tuttavia quando il calcolo è completo, la nozione infinitaria di conseguenza logica (semantica) è interscambiabile con quella finitaria di derivazione (sintattica).

7.1.4. Regole derivabili di (k)

- Ottenute per riduzione di successive applicazioni di regole primitive, assumendo le premesse come ipotesi (H).

1. Rafforzamento delle premesse (**RP**)

$$\frac{X \vdash \mathbf{b}}{X\mathbf{a} \vdash \mathbf{b}}$$

Derivazione:

$X \vdash \mathbf{b}$	H
$\mathbf{a} \vdash \mathbf{a}$	**A**
$X\,\mathbf{a} \vdash \mathbf{b} \wedge \alpha$	$\mathbf{I}\wedge$
$X\,\mathbf{a} \vdash \mathbf{b}$	$\mathbf{E}\wedge$

2. Concatenazione (**KS**)

$$\frac{\begin{array}{c} X \vdash \mathbf{a} \\ Y\,\mathbf{a} \vdash \mathbf{b} \end{array}}{X \cup Y \vdash \mathbf{b}}$$

Derivazione:

$Y\,\mathbf{a} \vdash \mathbf{b}$	H
$Y \vdash \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$	$\mathrm{I}\rightarrow$

$X \vdash \alpha$	H
$X \cup Y \vdash \mathbf{b}$	MP

3. Negazione intuizionistica (Regola dello Pseudo Scoto) ($\neg$**i**)

$$\frac{X \vdash \mathbf{a} \qquad Y \vdash \neg \mathbf{a}}{X \cup Y \vdash \mathbf{b}}$$

Derivazione:

$X \vdash \mathbf{a}$	H
$X \neg \mathbf{b} \vdash \mathbf{a}$	RP
$Y \neg \mathbf{b} \vdash \neg \alpha$	H
$X \cup Y \vdash \mathbf{b}$	$\neg$**k**

Calcolo intuizionistico si ottiene da **k** sostituendo $\neg$**k** con $\neg$**i** e aggiungendovi la regola $\neg$**j.** Mentre, se si sostituisce $\neg$**k** con la sola $\neg$**j** si ottiene il calcolo minimale. L'importanza della regola $\neg$**i** è conosciuta fina dal ME come regola dello Pseudo Scoto, *ex contradictione sequitur quodlibet.* → Logiche dialettiche

che ammettono la contraddizione devono negare questa regola, pena la loro completa banalizzazione → = logiche non scotiane.

4. Doppia negazione classica (**DN$_1$**)

$$\frac{X \vdash \neg\neg \mathbf{a}}{X \vdash \mathbf{a}}$$

Derivazione:

$X \vdash \neg\neg \mathbf{a}$	H
$X \neg \mathbf{a} \vdash \neg\neg \mathbf{a}$	RP
$\neg \mathbf{a} \vdash \neg\alpha$	A
$X \vdash \mathbf{a}$	$\neg \mathbf{k}$

Dalla negazione di una formula negata è derivabile la formula non negata.

5. Negazione minimale ($\neg$**j**)

$$X\,\mathbf{a} \vdash \mathbf{b}$$

$$Y\,\mathbf{a} \vdash \neg\mathbf{b}$$

$$\overline{}$$

$$X \cup Y \vdash \neg\mathbf{a}$$

Derivazione:

$X\,\mathbf{a} \vdash \mathbf{b}$	H
$\neg\neg\mathbf{a} \vdash \neg\neg\mathbf{a}$	A
$\neg\neg\mathbf{a} \vdash \alpha$	DN_1
$Y\,\mathbf{a} \vdash \neg\mathbf{b}$	H
$\neg\neg\mathbf{a} \vdash \neg\neg\mathbf{a}$	A
$\neg\neg\mathbf{a} \vdash \alpha$	DN_1
$Y \neg\neg\mathbf{a} \vdash \neg\mathbf{b}$	KS

$X \cup Y \vdash \neg \mathbf{a}$ $\neg \mathbf{k}$

Assunta una proposizione che porta a contraddizione, tale proposizione va negata.
→ Calcolo intuizionistico estensione (con $\neg \mathbf{i}$ come ulteriore primitivo) del calcolo minimale. D'altra parte sia calcolo intuizionistico che minimale inclusi nel calcolo classico, poiché le altre due regole di negazione derivabili in $\neg \mathbf{k}$.

6. Contrapposizione (**C**)

$$\frac{X\,\mathbf{a} \vdash \mathbf{b}}{X \neg \mathbf{b} \vdash \neg \mathbf{a}}$$

Derivazione:

$X\,\mathbf{a} \vdash \mathbf{b}$	H
$\neg \mathbf{b} \vdash \neg \mathbf{b}$	A
$\mathbf{a} \neg \mathbf{b} \vdash \neg \mathbf{b}$	RP

$X\neg \mathbf{b} \vdash \neg \mathbf{a}$ $\neg \mathbf{j}$

Se una proposizione è condizione necessaria per un'altra, il non valere della condizione necessaria implica il non valere dell'altra.

7. Esaustione (**E**)

$$\frac{\begin{array}{c} X\mathbf{a} \vdash \mathbf{b} \\ Y\neg \mathbf{a} \vdash \mathbf{b} \end{array}}{X \cup Y \vdash \mathbf{b}}$$

Derivazione:

$X\mathbf{a} \vdash \mathbf{b}$ H

$X\neg \mathbf{b} \vdash \neg \mathbf{a}$ C

$Y\neg \mathbf{a} \vdash \mathbf{b}$ H

$Y\neg \mathbf{b} \vdash \neg\neg \mathbf{a}$ C

$X \cup Y \vdash \mathbf{b}$ $\neg\mathbf{k}$

E assomiglia soltanto alla regola primitiva $\neg\mathbf{k}$ del calcolo **k**. La formula derivata nella conclusione infatti è affermata non perché la contraddizione era nelle formule derivate come nella regola $\neg\mathbf{k}$, ma nelle premesse. Per arrivare alla conclusione occorreva dunque spostare la contraddizione alle formule derivate nelle premesse, cosa che si è ottenuta mediante la doppia applicazione della regola di contrapposizione **C** alle due premesse.

8. Principio del terzo escluso (**TE**)

$$\vdash \mathbf{a} \vee \neg\mathbf{a}$$

Derivazione:

$\mathbf{a} \vdash \mathbf{a}$ A

$\mathbf{a} \vdash \mathbf{a} \vee \neg\mathbf{a}$ I$\vee$

$\neg\mathbf{a} \vdash \neg\mathbf{a}$ A

$\neg\mathbf{a} \vdash \mathbf{a} \vee \neg\mathbf{a}$ I$\vee$

$\vdash \mathbf{a} \vee \neg \mathbf{a}$ E

TE, E e $\neg$**k** sono strettamente connesse. Infatti, per derivare **TE** è indispensabile **E** che a sua volta suppone $\neg$**k.**

9. Principio di non contraddizione (**NC**)

$$\vdash \neg(\mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{a})$$

Derivazione:

$\mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{a} \vdash \neg \mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{a}$ A

$\mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{a} \vdash \neg \mathbf{a}$ E$\wedge$

$\mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{a} \vdash \mathbf{a}$ E$\wedge$

$\vdash \neg(\mathbf{a} \wedge \neg \mathbf{a})$ $\neg$**j**

Il fatto che **NC** sia ottenuto solo dalla regola di negazione minimale $\neg$**j,** mostra che è una regola derivabile in tutti i calcoli proposizionali (classico, intuizionistico e minimale). Ed è una prova che **TE** e **NC** non sono equivalenti.

E’ notevole inoltre il fatto che **TE** e **NC** siano formule derivabili a partire da un insieme vuoto di assunzioni, così da giustificare il fatto che siano “principi”. Ciò significa che sebbene siano regole sintattiche dei rispettivi calcoli — **NC** di **k, i, j**, **TE** del solo **k** — pur tuttavia, da esse non possa essere derivato alcunché, non possono cioè essere poste come premesse in alcuna derivazione di regole. Una proprietà questa ben nota anche agli antichi che per questo li definivano “principi primi”.

7.2. Cenni di semantica

- Semantica s’interessa delle relazioni fra linguaggio e ciò di cui il linguaggio parla → nozione di **interpretazione** mediante cui si attribuisce a ogni variabile proposizionale una **valore di verità** = dire se lo stato di cose espresso da quella variabile è realizzato o meno → si attribuisce a quella variabile il valore 1 o 0.

7.2.1. Definizioni preliminari

1. Interpretazione (I)
   V sia l’insieme delle variabili proposizionali di **k**:

$$I:V\rightarrow\{0,1\}$$

I è una funzione che associa ad ogni variabile: *p*, *q*, *r*,…un valore di verità: *I*(*p*)=1, *I*(*q*)=0, *I*(*r*)=1, … è un'interpretazione.

- Proprietà di **vero-funzionalità** dei connettivi logici $\neg p$, $p \square q$: è possibile assegnare univocamente un valore di verità a ciascuna delle proposizioni composte a partire dai soli valori di verità delle proposizioni atomiche componenti, in base alle seguenti **tavole di verità** dei connettivi logici:

$\neg$	
0	1
1	0

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

- Le tavole si leggono nel modo seguente: il primo argomento è preso dalla colonna all'estrema sinistra e il secondo argomento dalla prima riga.
- Una proposizione composta è detta una **tautologia** o **legge logica** se acquisterà valore 1 per qualsiasi valore di verità sia assegnato alle

proposizioni atomiche componenti (ovvero, per qualsiasi interpretazione delle variabili).

2. Formula vera ($I \models \mathbf{a}$)

Dove ($I \models \mathbf{a}$) è da leggersi come: "$\mathbf{a}$ è vera in I", "I è modello di $\mathbf{a}$", "I rende vera $\mathbf{a}$".

Definizione induttiva di formula vera usando il simbolo "≡" (coincide) come segno dell'identità notazionale. → "$\mathbf{a} \equiv p$" sta per "$\mathbf{a}$ è (coincide con) p".

i. $\mathbf{a} \equiv p$

$I \models p \Leftrightarrow I\,(p) = 1$

ii. $\mathbf{a} \equiv \neg \mathbf{b}$

$I \models \neg \mathbf{b} \Leftrightarrow non\ I \models \mathbf{b}$

$\Leftrightarrow I \not\models \mathbf{b}$

iii. $\mathbf{a} \equiv \mathbf{b} \square \mathbf{g}$

$$I \vDash \mathbf{b} \square \mathbf{g} \Leftrightarrow I \vDash \mathbf{b} \; \square \; I \vDash \mathbf{g}$$

3. Verità di un insieme di formule ($I \vDash$ X)

$I \vDash \mathrm{X} \Leftrightarrow (om\ \mathbf{a} \in \mathrm{X})\ (I \vDash \mathbf{a})$

I è modello di X se e solo se è modello di tutte le formule appartenenti a X.

4. Soddisfacibilità di una formula ($Sod\ \mathbf{a}$)

$Sod\,\mathbf{a} \Leftrightarrow (ex\ I \in \mathrm{X})\ (I \vDash \mathbf{a})$

5. Soddisfacibilità di un insieme di formule (Sod X)

$Sod\mathrm{X} \Leftrightarrow (ex\ I)\ (om\ \mathbf{a} \in \mathrm{X})\ (I \vDash \mathbf{a})$

6. Conseguenza logica ($\mathrm{X} \Vdash \mathbf{a}$)

$\mathrm{X} \Vdash \mathbf{a} \Leftrightarrow (om\ I)(I \vDash \mathrm{X} \Rightarrow I \vDash \mathbf{a})$

a è conseguenza logica di un insieme di formule X se e solo se tutte le interpretazioni che sono modello di X sono anche modello di **a**.

7. Formula valida ($\Vdash$ **a**)

$\Vdash \mathbf{a} \Leftrightarrow (om\ I)(I \vDash \mathbf{a})$

Una forula valida è una conseguenza logica a partire dall'insieme vuoto di assunzioni

7.2.2. Correttezza e completezza di (k)

- **Correttezza sintattica di k: k** è un calcolo corretto ⇔ ad ogni sequenza derivabile in **k** corrisponde una conseguenza logica.
- **Completezza semantica di k: k** è un calcolo completo ⇔ ad ogni conseguenza logica corrisponde una sequenza derivabile di **k**.
- Naturalmente i teoremi di completezza e correttezza di **k** non sono teoremi di **k**, ma teoremi su **k,** ovvero metateoremi su **k**. La logica usata per dimostrarli è un estensione predicativa della logica proposizionale classica. L'applicazione di tale

logica a livello metateorico non riguarda però i legami delle proposizioni del linguaggio-oggetto con gli oggetti della realtà, ma i legami delle espressioni con le proposizioni del linguaggio-oggetto e delle loro proprietà.

7.2.3. Teorema di correttezza del calcolo (k)

$$X \vdash \mathbf{a} \Rightarrow X \Vdash \mathbf{a}$$

- Questa tesi si dimostra induttivamente a partire dal caso più semplice indicato nella tesi stessa ed in sé abbastanza ovvio (perché se $\mathbf{a} \in X$ e quindi $X \vdash \mathbf{a}$, allora è ovvio supporre che per una generica I: $I \vDash X \Rightarrow I \vDash \mathbf{a}$), a tutte le formule molecolari derivabili in X che contengono i principali connettivi logici (Cfr. GA2, pp.48ss.).

7.2.4. Teorema di completezza del calcolo (k)

$$X \Vdash \mathbf{a} \Rightarrow X \vdash \mathbf{a}$$

- La dimostrazione dell'enunciato del teorema richiede due passi intermedi:

7.2.4.1. *Definizione di insieme consistente di formule* (*Cons* X)

$$Cons\ X \Leftrightarrow (ex\alpha)(X\nvdash\alpha)$$

$$\Leftrightarrow X\nvdash\alpha\wedge\neg\alpha$$

- L'equivalenza delle due formulazioni deriva dalla validità in **k** della regola $\neg$**i**. Infatti, da questa, se $X\vdash \mathbf{a}\wedge\neg\mathbf{a}$, allora $(om\mathbf{b})(X\vdash\mathbf{b})$ e, quindi $non(ex\mathbf{a}|X\nvdash\mathbf{a})$.

  Viceversa, se $X\nvdash\mathbf{a}\wedge\neg\mathbf{a}$, allora la stessa contraddizione $\mathbf{a}\wedge\neg\mathbf{a}$ può essere presa come una delle formule riguardo alle quali si dichiara la non derivabilità nella prima formulazione della definizione.

7.2.4.2. *Lemma di riduzione*

$$(omX)(ConsX\Rightarrow SodX)\Rightarrow(omX)(X\Vdash\mathbf{a}\Rightarrow X\vdash\mathbf{a})$$

- Cioè, se la consistenza implica la soddisfacibilità — implica che esista un modello per tale insieme —, allora vale la completezza (per la dimostrazione, vedi GA2, 53ss.).

- Per dimostrare la completezza di **k** basta perciò dimostrare l'ipotesi, che cioè, dato un qualsiasi insieme di formule X, *Cons*X⇒*Sod*X. Per poter però costruire un modello di X e quindi rendere X soddisfacibile, bisogna passare per un altro passo intermedio: dimostrare che esista un **insieme massimale** (un'estensione massimale) di X che lo contenga.
- Quindi, basandosi su alcune proprietà degli insiemi massimali come la **chiusura** e la **completezza rispetto ai segni logici,** si può passare alla costruzione di un modello per X.
  1. Un primo passo in questa direzione è definire il concetto di insieme massimale e quindi l'esistenza di insiemi massimali per insiemi consistenti di formule (**Lemma di Lindebaum**).
  2. In un secondo momento, dopo aver introdotto la nozione di **insieme chiuso** ed aver enunciato le proprietà di completezza, si dimostrerà che gli insiemi massimali (e le estensioni massimali di insiemi consistenti) sono chiusi e soddisfano queste proprietà.

7.2.4.3. *Definizione di insieme massimale*

$$\mathit{Max}\mathrm{X} \Leftrightarrow \mathit{Cons}\mathrm{X}\ \mathit{et}\ (\mathit{om}\mathrm{Y})(\mathrm{X} \subset \mathrm{Y} \Rightarrow \mathit{non}\ \mathit{Cons}\mathrm{Y})$$

- Cioè, un insieme X è massimale sse è consistente e qualsiasi insieme che lo include propriamente (ossia, qualsiasi altra sua estensione propria, che include cioè qualche formula in più rispetto a X) è inconsistente.

7.2.4.4. *Lemma di Lindebaum*

$$\mathit{Cons}\mathrm{X} \Rightarrow (\mathit{ex}\mathrm{Y})(\mathrm{Y} \supseteq \mathrm{X}\ \mathit{et}\ \mathit{Max}\mathrm{Y})$$

- Cioè, dato un insieme consistente, esiste una sua sua estensione massimale.
- La dimostrazione di questo lemma si basa sulla possibilità di enumerare tutte le formule di **L(k).** Un metodo è quello di enumerare tutti i segni appartenenti a **k**, quindi tutte le *n*-ple di segni e quindi scegliere fra queste ultime la successione delle formule.

- Dato perciò l'insieme consistente di formule X e che la sequenza di formule $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$,… sia un'enumerazione delle formule appartenenti a **L(k)**, occorre dimostrare che esiste un'estensione massimale di X.
- Ciò si ottiene dimostrando induttivamente la nozione di insieme di formule X_i:
  1. Base: $X_0=X$
  2. Passo: $$\mathrm{X}_{i+1} = \begin{cases} \mathrm{X}_i \cup \{\alpha_{i+1}\} \text{se } Cons \mathrm{X} \cup \{\alpha_{i+1}\} \\ \mathrm{X}_i \text{ se } \quad non \; Cons \mathrm{X} \cup \{\alpha_{i+1}\} \end{cases}$$
- In tal modo, si può comprendere che, dato che in questo modo si persegue iterativamente (meccanicamente) la costruzione di insiemi sempre più estesi dell'insieme di partenza, visto che essi crescono monotonamente (cioè, $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2$…), si possa alfine giungere alla costruzione dell'insieme massimale Y di X. La dimostrazione è in GA2, 55ss..
- Una volta dimostrato il Lemma suddetto, si passa alla dimostrazione che gli insiemi massimali godono della proprietà di chiusura e completezza rispetto ai segni logici di **k**.

7.2.4.5. Definizione di chiusura di X (Ch X).

$$ChX \Leftrightarrow (om\alpha)(X \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \in X)$$

- Cioè, un insieme è chiuso se contiene tutte le formule in esso derivabili.

7.2.4.6. Definizione di completezza rispetto ai segni (connettivi) logici

- Si dice che un insieme X gode della proprietà di completezza rispetto a ¬, □, cioè la completezza vale per X[**k¬, k□**), sse:

$$\neg\alpha \in X \Leftrightarrow \alpha \notin X$$

$$\mathbf{a}\square\mathbf{b} \in X \Leftrightarrow \mathbf{a} \in X \;\square\; \mathbf{b} \in X$$

7.2.4.7. Teoremi sugli insiemi massimali

- Si passa quindi alla dimostrazione che gli insiemi massimali godono della proprietà di chiusura e di completezza rispetto ai segni logici… (vedi GA2, 57ss.)

7.2.4.8. Teorema di completezza di (k)

- Fatto questo, si può passare alla dimostrazione del teorema di completezza del calcolo **k**:

$$(om\mathrm{X})(Cons\mathrm{X} \Rightarrow Sod\mathrm{X})$$

- Tale dimostrazione si ottiene a partire dal Lemma di Lindebaum, cioè che esiste un'estensione massimale di X, Y, e che per ogni *p* valga la seguente interpretazione *I*:

$$I(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \mathrm{Y}$$

$$I(p) = 0 \Leftrightarrow p \notin \mathrm{Y}$$

Dato questo, la dimostrazione prosegue utilizzando le proprietà di chiusura e completezza degli insiemi massimali per costruire il modello *I* che soddisfi Y e dunque anche X, parte propria di Y. (Cfr. GA2, 62ss.)

7.2.4.9. Finitezza semantica di k

♦ Dimostrata la finitezza sintattica di **k** si può dimostrare come corollario della completezza semantica di **k** la finitezza semantica di **k**, ossia la sua **compattezza**.

7.2.5. Cenni di semantica applicata all'analisi logica delle teorie

- La semantica s'interessa delle relazioni fra linguaggio e ciò di cui il linguaggio parla $\rightarrow$ nozione di **interpretazione** mediante cui si attribuisce a ogni variabile proposizionale una **valore di verità** = dire se lo stato di cose espresso da quella variabile è realizzato o meno $\rightarrow$ si attribuisce a quella variabile il valore 1 o 0.

7.2.5.1. Definizioni preliminari

- Interpretazione (I)α:
  - V sia l'insieme delle variabili proposizionali di **k**:

$$I:V \rightarrow \{0,1\}$$

    I è una funzione che associa ad ogni variabile: *p, q, r,*…un valore di verità: *I*(*p*)=1, *I*(*q*)=0, *I*(*r*)=1, … è un'**interpretazione** o **modello** di quelle variabili.
  - Proprietà di **vero-funzionalità** dei connettivi logici $\neg p, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, p \leftrightarrow q$: è possibile assegnare univocamente un valore di verità a ciascuna delle proposizioni composte a partire dai soli valori di verità delle proposizioni

atomiche componenti, in base alle seguenti **tavole di verità** dei connettivi logici:

p q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
1 1	0	1	1	1	1
1 0	-	0	1	0	0
0 1	1	0	1	1	0
0 0	-	0	0	1	1

7.2.5.2. Tre sensi della disgiunzione "o"

♦ Ricordiamo che a proposito della **disgiunzione** "*p* o *q*", esistono almeno **tre sensi** diversi di cui bisogna tener conto in logica, ma che spesso dal linguaggio comune **sono confusi**, anche quando lo si usa nei testi di logica per denotarli, e dove dunque fanno fede **solo le tavole di verità** relative per distinguerli[ii]. I tre sensi sono:

1. il senso dell'**alternativa** o **somma logica**, che è quello espresso dalla tavola di $p \vee q$ (1110) *falsa solo quando ambedue sono false*, quando cioè non si esclude

che le due disgiunte possano darsi insieme (p.es.: “Isidoro è sacerdote o religioso”, il senso di “o” è propriamente quello di “e/o”, del latino *vel*), esistono almeno altri due sensi:

2. La **disgiuntiva** (0110), *vera solo quando una delle due è vera*, quando cioè si esclude che le due disgiunte possano andare insieme e non esiste alcun altra possibilità che scegliere una delle due perché una delle due sarà necessariamente vera: è il senso latino dell’ *aut aut* (p.es., come quando si dice: “O è giorno, o è notte”), e dove dunque la tavola di verità sarebbe:

p	q	$p \vee_1 q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1

0	0	0

3. L'**esclusiva** (0111)**,** *falsa solo quando ambedue sono vere*, quando cioè si esclude solo che le due disgiunte possano andare insieme, ma non si esclude la possibilità che si possa non scegliere fra le due, perché esistono altre possibilità e dunque potrebbero essere ambedue false: è il senso latino dell'*aut* (p.es., come quando si dice "Isidoro è cattolico o protestante" che è una disgiunzione che non che Isidoro possa essere nessuna delle due alternative, per esempio buddista o scintoista), e dove dunque la tavola di verità sarebbe:

p	q	$p \vee_2 q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1

0	0	1

- Ma è facile dimostrare che la tavola di verità di queste due ulteriori sensi della disgiunzione si riducono a quelle di particolari combinazioni dei primi tre connettivi logici, e cioè:
  4. La tavola di verità per $p \vee_{\mathbf{1}} q$ si riduce a quella della formula composta $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$, ove, appunto si nega, sia che possano essere ambedue false, ovvero $(p \vee q)$, sia che possano essere ambedue vere $\neg(p \wedge q)$ → (0110).
  5. La tavola di verità per $p \vee_{\mathbf{2}} q$ si riduce a quella della negazione della congiunzione, $\neg(p \wedge q)$. Infatti la tavola della verità di $p \vee_{\mathbf{2}} q$, (0111), altro non è che la negata della tavola della verità della congiunzione $p \wedge q$ (1000).

7.2.5.3. Tre sensi della condizione “se…allora”

- Abbiamo già visto due sensi della **condizione:** il senso dell’implicazione “materiale” $p \rightarrow q$, dato dalla tavola della verità (1011), ed il senso della doppia implicazione materiale o “equivalenza” $p \leftrightarrow q$ “se e solo se…allora”, dato dalla tavola di verità (1001).

- Ciò che distingue anche a prima vista i due sensi è la **simmetricità** della relazione condizionale fra antecedente e conseguente nell’equivalenza, a differenza dell’**asimmetricità** della relazione condizionale nell’implicazione materiale.
- Ovvero: nel caso dell’equivalenza, il senso della proposizione complessa rimane immutato **se scambiamo di posto** alle due proposizioni semplici componenti: l’antecedente e il conseguente.
- P.es., è del tutto equivalente dire, al livello del mare, “se e solo se l’acqua bolle è a cento gradi, allora bolle”, oppure “se e solo se l’acqua bolle è a cento gradi”. Si tratta dunque di due espressioni dal significato **equivalente**.
- In termini della relazione condizionale che le contraddistingue, si può dire che l’una è **condizione necessaria e sufficiente** dell’altra.
- È chiaro allora che, equivalenza vuol dire simmetricità della relazione condizionale e questa simmetricità vuol dire che, nei due sensi della relazione, l’una è rispetto all’altra condizione necessaria e sufficiente, allora nel caso dell’**asimmetricità** della relazione condizionale dell’implicazione materiale, **l’una è condizione necessaria e**

l’altra sufficiente della verità formale dell’implicazione, e quale sia l’una o l’altra **dipende univocamente dal posto** che assume nella relazione e che **non può essere in alcun modo invertito**.

- Ora, se riflettiamo un attimo sulla tavola di verità della implicazione materiale (1011), si vede chiaramente che la verità dell’implicazione non dipende mai dalla verità dell’antecedente, viceversa, nel caso in cui l’antecedente sia vera, **necessariamente** per la verità dell’implicazione dovrà essere vera la conseguente.
- Nel simbolismo usato $p \rightarrow q$, dunque, *p* deve denotare la condizione solo **sufficiente**, *q* quella **necessaria**, il che va quasi sempre contro il senso comune. P.es., è chiaro a tutti che l’espressione “se ho due monete da cinquanta euro (*p*), allora ho cento euro (*q*)”, l’antecedente intuitivo corrisponde a quello simbolico. Avere due monete da cinquanta è infatti condizione solo **sufficiente** ad avere cento euro — potrei avere cento euro anche avendo un’altra combinazione di monete, quindi $((\mathbf{0} \rightarrow 1) \equiv 1)$ —, mentre avere cento euro è **necessario**, se ho due monte da cinquanta. Infatti $((1 \rightarrow \mathbf{1}) \equiv 1)$, invece se $((1 \rightarrow \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0})$, mai cioè se ho due monete da cinquanta **non avrò** cento euro.

- Tuttavia, in molti casi, nel linguaggio ordinario si fa confusione. P.es., "se c'è fumo allora c'è fuoco" sarebbe falso simbolizzarlo con $p \rightarrow q$, dove "c'è fumo" $\equiv p$, e "c'è fuoco"$\equiv q$. Infatti il fuoco è condizione solo **sufficiente** al darsi del fumo (p.es., ci potrebbe essere del ghiaccio secco nell'acqua a produrlo), viceversa se c'è del fuoco è **necessario** che via sia fumo. Quindi la simbolizzazione sarebbe l'altra "c'è fumo" $\equiv q$, e "c'è fuoco"$\equiv p$, $p \rightarrow q$, ovvero "se c'è fuoco allora c'è fumo".
- Ma non è questo il senso della proposizione del senso comune: "se c'è fumo allora c'è fuoco". Essa di fatto, allora, esprime un'altra condizione, quella che in contesti normali, esiste un'**equivalenza** fra l'accadere del fumo e l'accadere del fuoco. Si sta cioè dicendo che "solo e solo se c'è fuoco c'è fumo", e viceversa, quindi la presenza di fumo è *ipso facto* segno di pericolo del fuoco. Perciò la simbolizzazione corretta dell'espressione del senso comune di cui sopra è ($p \leftrightarrow q$), ovvero ($q \leftrightarrow p$).

7.2.6. Uso delle tavole di verità

7.2.6.1. Principio di vero-funzionalità

- ♦ Come già detto, il principio fondamentale della semantica del calcolo proposizionale è il principio di **vero-funzionalità** secondo il quale il valore di verità di una **proposizione complessa** dipende dal valore di verità delle **proposizioni elementari componenti.**
- ♦ Il metodo con cui verificare formule proposizionali complesse (determinare il valore di verità delle formule più interne, fino a determinare il valore di verità dell'intera formula) è spiegato sia in [GA1, pp. 42-ss.], sia più diffusamente in [BO, cap. III].
- ♦ Sono così possibili **tre casi:**

1. **Proposizioni valide o tautologie o leggi logiche**: sono quelle proposizioni complesse che sono sempre vere per qualsiasi combinazione dei valori di verità delle proposizioni componenti.
   P.es.: La formula <$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$> («Se piove, allora la terra è umida, ma piove, dunque la terra è umida ») è **valida**, infatti è vera per qualsiasi

sostituzione delle variabili. Costituisce infatti la formalizzazione della famosa legge logica del *modus ponendo ponens*, base di qualsiasi teoria deduttiva.
In [BO, cap. V] sono elencate e commentate quasi 80, le più importanti, leggi di logica delle proposizioni.

2. **Proposizioni soddisfacibili o contingenti:** sono quelle proposizioni che sono vere (soddisfacibili) solo per alcune sostituzioni delle variabili.
   P.es.: La formula $<p\rightarrow(q\wedge p)>$ è falsa con $q/0$, $p/1$ (infatti, con queste sostituzioni otterremmo $1\rightarrow(0\wedge 1)$, quindi, risolvendo la parentesi: $1\rightarrow 0$, il cui valore è 0), mentre è vera con qualsiasi altra sostituzione.

3. **Proposizioni contradditorie o sempre false:** sono quelle proposizioni che risultano false per qualsiasi sostituzione delle variabili.
P.es., $<p\wedge\neg p>$ è falsa sia per p/1 che per p/0. Non per nulla la negata di questa formula, $<\neg(p\wedge\neg p)>$, darà una proposizione sempre vera. Quest'ultima formula, infatti, è la formalizzazione del **principio di non contraddizione**, la più fondamentale delle leggi logiche.

7.2.6.2. Metodo di verifica della validità di un’argomentazione mediante negazione della sua falsificabilità

- Generalmente un’argomentazione ha la forma di una **congiunzione di una serie di proposizioni semplici e/o complesse** (premessa) che hanno come conclusione **una proposizione semplice o complessa.**
- La verifica della sua validità, consisterà dunque nel controllare se **per qualche sostituzione delle variabili** si potrà ottenere globalmente una implicazione falsa $<1\rightarrow 0>$, che falsificherebbe l’argomentazione rendendola invalida.
- Il metodo delle tavole di verità fornisce un **algoritmo molto semplice** per tale verifica, infatti generalmente, **non ci sarà bisogno** di provare tutte le combinazioni delle possibili sostituzioni delle variabili. Basterà controllare **solo quella(e) che potrebbe(ro) portare alla implicazione falsa finale.**
- La formula del **modus ponendo ponens** prima esaminata ci fornisce un classico esempio. Data la formula $<((p \rightarrow q)\wedge p)\rightarrow q>$ è chiaro che essa è un argomentazione a due premesse che potrebbe essere falsificata solo per $p/1$ $q/0$. La congiunzione

delle premesse sarà 1 sse tutte e due le premesse sono vere, quindi se *p*/1 e la conclusione sarà falsa sse *q*/0. Ma con queste sostituzioni avremmo : $<((1 \rightarrow 0)\wedge 1)\rightarrow 0>$, quindi $<(0\wedge 1)\rightarrow 0>$, e cioè $<0\rightarrow 0>$ che dà 1. Quindi la formula è valida.

- Viceversa la formula $<((p \rightarrow q)\wedge q)\rightarrow p>$ è lo schema di una classica fallacia in cui spesso chi non sa di logica incorre, quello cioè di pensare che la verità della conclusione implica la verità della(e) premessa(e). Infatti, la sostituzione che potrebbe falsificarla *p*/0, *q*/1 effettivamente la falsifica: $<((0 \rightarrow 1)\wedge 1)\rightarrow 0>$, quindi $<(1\wedge 1)\rightarrow 0>$, e cioè $<1\rightarrow 0>$ che dà 0. Quindi la formula è invalida.

- E' per questo motivo, fra l'altro, che i controlli empirici che possiamo dedurre da una certa teoria scientifica, anche se positivi, non potranno mai verificare la teoria, ma solo falsificarla, se saranno negativi. Infatti, per quest'ultimo caso, è una proposizione valida la legge del cosiddetto **modus tollendo tollens :** $<((p \rightarrow q)\wedge\neg q)\rightarrow\neg p>$ (se una conclusione è falsa allora certamente sarà falsa anche la congiunzione delle premesse). Infatti, la sostituzione che potrebbe falsificarla sarebbe : *p*/1, *q*/0, quindi : $<((1 \rightarrow 0)\wedge\neg 0)\rightarrow\neg 1>$, $<(0\wedge 1)\rightarrow 0>$. Ma : $<0\rightarrow 0> \equiv 1$.

Quindi la formula è schema di una proposizione **valida**, di una **legge logica,** appunto.

7.2.7. Definizione formalizzata di una teoria

7.2.7.1. Calcolo Formale come Sistema Formale

- Approfondendo la costituzione di un calcolo formale, la sua **struttura** e la **natura** degli elementi che lo compongono, possiamo dire che un calcolo formale costituisce un **sistema formale,** ovvero un **sistema deduttivo formalizzato.**
- Con **sistema formale** s'intende nella logica moderna un calcolo formale per il quale si possono fornire diverse **interpretazioni** che corrisponderanno ad altrettante **teorie**.

- Dal punto di vista della sua **struttura** si può dire che un sistema formale è un **linguaggio formale** in cui i termini e/o le proposizioni che appartengono a tale linguaggio sono tutti rigorosamente **dichiarati, o definiti, o dimostrati,** man mano che vengono aggiunti al linguaggio stesso.

1. Innanzitutto, in tale linguaggio devono essere **dichiarati** quelli che sono i **primitivi** di quel linguaggio, ovvero termini e proposizioni elementari (soggetto - predicato) che non vengono rigorosamente definiti all'interno del linguaggio, ma che si suppongono conosciuti, visto che saranno usati per costruire gi **assiomi, le regole e le definizioni** che costituiranno le **proposizioni-base** del sistema formale.

2. Ciò che caratterizza un sistema formale sono poi le **proposizioni-base** di esso:

   a. Fra di esse, innanzitutto, vi sono gli **assiomi**, proposizioni non dimostrate entro quel linguaggio da cui formare per dimostrazione successive proposizioni. Come sappiamo, essenziale per la rigorosa costruzione di un linguaggio formale è che i suoi assiomi siano in numero finito, che sia dimostrabile la loro reciproca non - contraddittorietà e che siano effettivamente tali, ovvero non deducibili dagli altri assiomi del linguaggio.

   b. Altro tipo di proposizioni-base sono le **definizioni** dei termini e delle operazioni usati per le deduzioni.

c. Vi sono poi le **regole di formazione**, mediante cui le definizioni e le altre proposizioni-base sono costruite a partire dai termini primitivi.

d. Vi sono infine le **regole di deduzione** mediante cui altre proposizioni verranno successivamente e non ambiguamente dedotte a partire dagli assiomi e dalle definizioni.

3. **Tutte le altre proposizioni** costruite a partire dalle **proposizioni-base** costituiranno così altrettanti **teoremi** di quel linguaggio formale. Fra di essi, i teoremi da cui, applicando le regole di deduzione, altri teoremi possono essere dedotti, si definiranno **lemmi.**

7.2.7.2. Definizione generale di teoria

- Con teoria T si intende un linguaggio che parla di un certo, limitato, universo di oggetti, ovvero un insieme di proposizioni che, data l'interpretazione I su quell'universo (o interpretazione *standard*), risultano in esse **vere**:

$$T = \{\mathbf{a} : I(\mathbf{a}|\mathbf{1}\}$$

- P.es., tutte le proposizioni vere dell'**aritmetica elementare** sono considerate l'interpretazione standard I della **teoria dei numeri naturali.**
- È chiaro che l'insieme delle formule {**a**} di cui T costituisce una interpretazione **vera** può essere anche un **sistema formale**, in tal caso T sarebbe una T **formalizzata**.

7.2.7.3. Definizione modellistica di teoria

- In altri termini, in base alla precedente definizione di T esiste il problema di trovare l'insieme delle proposizioni vere che corrispondono a T mediante una **procedura finitistica**, ovvero, con un numero comunque finito di passi.
- → Necessità di un **assiomatizzazione delle teorie,** di derivare cioè tutte le proposizioni **vere**, α, in una teoria, esclusivamente da un insieme **finito** di proposizioni-base privilegiate, in particolare gli **assiomi**, supposti **veri** per quell'universo di oggetti di cui parla la teoria **.** Definizione modellistica di teoria assiomatizzata, $\mathcal{A}$(T), usando la nozione di per sé infinitaria, di **conseguenza logica** $\Vdash$:

$$T = \{\mathbf{a} : \mathcal{A}(T) \Vdash \mathbf{a}\}$$

Dove con “conseguenza logica” o **implicazione formale** s’intende la conseguenza **vera** di un’implicazione che, a differenza della conseguenza di un’implicazione “materiale”, può essere implicata solo da premesse a loro volta **vere. “**Vere”, ovviamente, in un contesto limitato, per qualche modello del **sistema formale** soggiacente, perché siamo nell’ambito dell’argomentazione **ipotetica** e non **apodittica.**

- → Definizione di T come **chiusa** rispetto al nesso di conseguenza logica, ovvero ogni proposizione che è una conseguenza logica delle premesse della teoria appartiene alla teoria.
- → Se T fosse anche **completa,** ovvero se fosse vero anche che le sue conseguenze coprono la **totalità** delle proposizioni vere in I, allora la T assiomatizzata coinciderebbe con quella non assiomatizzata.
- I teoremi di Gödel dimostrano invece che la completezza è impossibile, proprio a partire dalla **teoria assiomatizzata della aritmetica elementare.** Essi dimostrano

infatti che **non** tutte le proposizioni vere dell'aritmetica elementare sono **decidibili** (dimostrabili) nell'aritmetica **assiomatizzata** (aritmetica di Peano).

- Siccome un precedente teorema di Gödel (**teorema di codifica goedeliana**) che è alla base dell'informatica, dimostra che **qualsiasi linguaggio formalizzato** può essere codificato in termini aritmetici (codifica numerica), i teoremi di incompletezza di Gödel acquistano valore di **teoremi di limitazione universale** per qualsiasi linguaggio formalizzato o teoria assiomatizzata.

8. Logica dei Predicati

8.1. Dalla Logica delle Proposizioni alla Logica dei Predicati [BO, cap. VII]

- La logica delle proposizioni costituisce solo la **parte elementare** della logica deduttiva, ma non può esaurire tutte le forme **valide** di dimostrazione.
- Ad esempio, se traducessimo in termini di logica proposizionale lo schema fondamentale del **sillogismo,** il semplice *Barbara*:

Se ogni M è P
ed ogni S é M
allora ogni S è P

Otterremmo la formula $<(p \wedge q) \rightarrow r>$ che non è una **legge logica**: infatti per $p/1$, $q/1$, $r/0$ risulterebbe **falsificata**.

- L’errore è che la formula del *Barbara* è una formula di **logica dei termini** non di **logica delle proposizioni**. *M*, *S* e *P* sono variabili **terminali**, non proposizionali.

- Generalmente, la **logica dei termini** si suddivide in:
  1. **Logica dei predicati**
  2. **Logica delle classi**
  3. **Logica delle relazioni**

- Nella logica dei predicati, infatti, non consideriamo più, nello studio delle argomentazioni valide, le proposizioni semplici come altrettante **“scatole nere”,** ma ci interessiamo della loro costituzione **interna**. P.es., il sillogismo e una metodologia d’inferenza deduttiva per connettere in modo valido **soggetto e predicato** nella conclusione a partire dalle connessioni fra soggetto e predicato nelle due premesse (maggiore e minore).

- Così, nella logica dei predicati i due componenti fondamentali non sono variabili proposizionali e predicati (costanti) proposizionali, ma **variabili terminali** (*x*,*y*,*z*,*w*,…) che denotano oggetti individuali generici (in **LN:** “qualcosa”, “qualcuno”), **costanti terminali** (*a*,*b*,*c*,…) che rappresentano nomi di oggetti singoli determinati (corrispondenti in **LN,** p.es., a nomi propri nel caso di viventi, denotazioni di oggetti singoli anche inanimati: “quell’auto”, “quella casa”, etc.) e **predicati (costanti predicative) terminali** (*P*, *Q*, *R*,…) a 1,2,3,…,*n* **argomenti**.

- Per poter simbolizzare **proposizioni universali generiche,** dove cioè gli argomenti dei predicati sono **variabili terminali** (che denotano oggetti individuali generici e non individui singoli) abbiamo bisogno di **due quantificatori**:
  4. **Quantificatore universale,** $\forall$, “per ogni” → $\forall x\, Px$: “per ogni *x* che è *P*”
  5. **Quantificatore esistenziale,** $\exists$, “esiste almeno un” → $\exists x\, Px$ “esiste almeno un *x* che è *P*”

- Come sappiamo, le formule quantificate possono essere considerate come **proposizioni** e non come semplici **funzioni proposizionali** perché ad esse possono essere assegnati **valori di verità**. Infatti, malgrado nella formula sono presenti dei segni di variabili, esse sono **vincolate dai quantificatori**, quindi non si tratta propriamente di variabili.

- → Possibilità di connettere formule vincolate dai quantificatori mediante i **connettivi logici** del calcolo proposizionale → **formule complesse del calcolo dei predicati C.**

8.2. Cenni di sintassi

- Il linguaggio **L** della logica dei predicati è costituito da un alfabeto **A** e regole di formazione **F** → **L=<A,F>.**

8.2.1. Alfabeto

- Sintetizzando quanto detto finora, abbiamo quattro categorie di segni:

6. **Variabili individuali:** x, y, z, … con eventuali indici sottoscritti. Talvolta questi segni sono presi anche come segni metateorici di variabili.
7. **Costanti individuali:** a,b,c, …. che rappresentano nomi di oggetti singoli
8. **Costanti Predicative:**

$$P_1^1\ P_2^1\ P_3^1 \cdots$$

$$P_1^2\ P_2^2\ P_3^2 \cdots$$

$$P_1^3\ P_2^3\ P_3^3 \cdots$$

Dove P è un segno per una proprietà o relazione e, in generale P_k^n è la *k*-esima costante predicativa ad *n* argomenti (*n*-adica) che indica una relazione fra *n* individui.

9. **Segni logici:**
   e. *Connettivi logici*: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
   f. *Quantificatori:* $\exists$, $\forall$
   g. *Segni ausiliari:* (,)

Alfabeto di C

Linguaggio	**Metalinguaggio**
a. Variabili terminali: x,y,z…	**a. Metavariabili terminali:** α,β,γ,…
b. Costanti terminali: a,b,c,…	**b. Metacostanti terminali:** μ,ν,o,...
c. Costanti predicative: $P_1^1\ P_2^1\ P_3^1 \cdots$ $P_1^2\ P_2^2\ P_3^2 \cdots$ $P_1^3\ P_2^3\ P_3^3 \cdots$	**c. Metacostanti predicative:** $\varphi_1^1\ \varphi_2^1\ \varphi_3^1 \cdots$ $\varphi_1^2\ \varphi_2^2\ \varphi_3^2 \cdots$ $\varphi_1^3\ \varphi_2^3\ \varphi_3^3 \cdots$
d. Quantificatori ∃, ∀	**d. Metaquantificatori:** ***ex, om***
c. Costanti proposizionali: non: ¬ (~) [NEGAZIONE] e: ∧ (·) [CONGIUNZIONE]	**b. Metacostanti proposizionali:** non et

o: $\vee$ [DISGIUNZIONE] se…allora: $\rightarrow$ ($\supset$) [IMPLICAZIONE MATERIALE] se e solo se: $\leftrightarrow$ ($\equiv$) [EQUIVALENZA]	vel $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow$
c. Segni ausiliari: (,)	**c. Segni ausiliari:** (,)

8.2.2. Regole di formazione

- **FF: Regole di formazione delle formule** $\mathbf{a}$: coincidono con le clausole della definizione induttiva di formula:
  Base: $P_k^n(x_1 \ldots x_n)$ è una formula elementare

  Passo: a) formule molecolari; **b)** formule quantificate

  a) $\neg\mathbf{a}$ è una formula; $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\vee\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\rightarrow\mathbf{b}$, $\mathbf{a}\leftrightarrow\mathbf{b}$ sono formula.

  b) $\forall x\,\mathbf{a}$ è una formula; $\exists x\,\mathbf{a}$ è una formula; nient’altro è una formula.

8.3. Cenni di semantica

8.3.1. Regole di quantificazione

- La funzione dei quantificatori è essenzialmente quella di definire **il dominio di soddisfacibilità di un determinato predicato** (qual'è la collezione di elementi che **rende vero** un predicato) **,** nel caso di proposizioni predicative **universali**, ovvero che non sono vere solo per uno o più singoli individui concreti (denotati da una costante terminale, *a*, *b*), ma per **alcuni** (quantificatore esistenziale o particolare, ∃) o **tutti** (quantificatore universale ∀) gli individui generici (denotati da una variabile terminale, *x*, *y*) di una certa collezione (classe o insieme in logica, genere (specie) in ontologia).
- Quattro sono le **regole di quantificazione** per trasformare proposizioni **atomiche** del calcolo dei predicati (p.es., «l'uomo è mortale») in proposizioni **molecolari** del calcolo delle proposizioni (p.es., «per ogni *x*, se *x* è uomo, allora *x* è mortale») cui applicare le **regole d'inferenza** relative alle **leggi logiche** del calcolo delle proposizioni per dimostrazioni formali di validità:
    1. om$\alpha\ \varphi\alpha \Rightarrow \varphi\nu$: **Esemplificazione Universale (EU)**

2. $\varphi\beta \Rightarrow \text{om}\alpha\ \varphi\alpha$: **Generalizzazione Universale (GU)**
3. $\text{ex}\alpha\ \varphi\alpha \Rightarrow \varphi\nu$: **Esemplificazione Esistenziale (EE)** [per $\nu \neq \beta$ e senza occorrenze precedenti]
4. $\varphi\nu \Rightarrow \text{ex}\alpha\ \varphi\alpha$: **Generalizzazione Esistenziale (GE)**

dove ν è un qualsiasi simbolo individuale e β denota un individuo scelto arbitrariamente.

→ Es.(1): $<\forall x\, Ux \rightarrow Mx \Rightarrow Ua \rightarrow Ma>$ per EU («Se ogni uomo è mortale, allora è vero che, se Antonio è uomo, allora Antonio è mortale»).

→ Es.(2): $<Uy \rightarrow My \Rightarrow \forall x\, Ux \rightarrow Mx>$ per GU («Se un qualsiasi uomo è mortale allora è vero che ogni uomo è mortale») [→ Cfr. necessità del campionamento casuale in tutte le leggi di tipo statistico].

→ Es. (3): $<\exists x\, Ux \wedge Vx \Rightarrow Ua \wedge Va>$ per EE («Se esistono degli uomini viziosi, allora è vero che alcuni uomini sono viziosi»).

→Es. (4): $<Pa \Rightarrow \exists x\ Px>$ per GE («Se io penso, allora è vero che esiste qualcosa che pensa») [→ Cfr. errore di Descartes: confondere una legge logica con una ontologica: “l’io penso”, in quanto atto di coscienza fonda l’esistenza della coscienza (cfr. Gassendi, Kant, Hegel…: come ogni legge logica è una tautologia …) non l’esistenza di una sostanza spirituale individuale (*res cogitans*) come pretendeva Descartes].

- Abbiamo inoltre due **equivalenze** per definire l’uso di quantificatori e consentire la verifica degli argomenti che li utilizzano, posto che essi sono validi *se e solo se* sono validi qualunque sia il numero degli individui esistenti, supposto che ne esista almeno uno.
  1. $\forall x\, Px \equiv \left(Pa \wedge Pb \wedge Pc \wedge \ldots \wedge Pn\right)$, per il **quantificatore universale**
  2. $\exists x\, \phi x \equiv \left(\phi a \vee \phi b \vee \phi c \vee \ldots \vee \phi n\right)$, per il **quantificatore esistenziale**

  → La verifica consisterà allora in tentativi di invalidare l’argomento per **modelli** (mondi possibili) che contengano 1, 2,…*n* individui.

  → P. es., l’argomento $\left\langle\left[\left(\forall x\, Cx \to Ax\right) \wedge \left(\exists x\, Cx \cdot Gx\right)\right] \to \left(\forall x\, Gx \supset Ax\right)\right\rangle$ (Tutti i *collie* sono affettuosi, alcuni *collie* sono cani da guardia, quindi tutti i cani da guardia sono affettuosi) è valido per un modello ad un solo individuo — infatti $\left\langle\left[\left(Ca \to Aa\right) \wedge \left(Ca \wedge Ga\right)\right] \to (Ga \to Aa)\right\rangle$ è sempre vero —, ma è invalido per un modello a due individui. Infatti:

$$\left\langle\left\{\left[\left(Ca \to Aa\right) \wedge \left(Cb \to Ab\right)\right] \wedge \left[\left(Ca \wedge Ga\right) \vee \left(Cb \wedge Gb\right)\right]\right\} \to \left[(Ga \to Aa) \wedge (Gb \to Ab)\right]\right\rangle$$

è falso per (*Ca*, *Aa*, *Ga*, *Gb*) / 1 e (*Cb*, *Ab*) / 0

8.3.2. Regole sillogistiche

- Possibilità di esprimere entro il calcolo dei predicati tutte le fondamentali regole del calcolo sillogistico.

- Innanzitutto la regola fondamentale di **simbolizzazione** delle proposizioni a quantificazione **universale** e **particolare** (**esistenziale**), con le relative **negative:**
  1. «Tutti gli uomini sono animali»: $\left(\forall x\left(Ux \to Ax\right)\right)$; «Nessun uomo è un angelo»: $\left(\forall x\left(Ux \to \neg Gx\right)\right)$.
  2. «Qualche uomo corre»: $\left(\exists x\left(Ux \wedge Cx\right)\right)$; «Qualche uomo non corre»: $\left(\exists x\left(Ux \wedge \neg Cx\right)\right)$

- Simbolizzazione della forma fondamentale del **sillogismo *in Barbara*:**
  <$\left(\left(\forall x\, Ax \to Mx\right) \wedge \left(\forall x Ux \to Ax\right)\right) \to \left(\forall x Ux \to Mx\right)$> («Se tutti gli animali sono mortali e tutti gli uomini sono animali, allora tutti gli uomini sono mortali»)
- Simbolizzazione della forma *in Barbara* a **quantificazione particolare:**
  <$\left(\left(\forall x\, Ix \to Ex\right) \wedge \left(\exists x\, Ix \wedge Rx\right)\right) \to \left(\exists x\, Ex \wedge Rx\right)$**>** («Se tutti gli Italiani sono Europei e alcuni Italiani sono Ricchi, allora alcuni Europei sono ricchi»).
- Simbolizzazione delle **proposizioni tipiche del linguaggio sillogistico**:
  universali affermative (tipo A:«Tutti gli Italiani corrono» $\left(\forall x\left(Ix \to Cx\right)\right)$),
  le **universali negative** (tipo E: $\left(\forall x\left(Ix \to \neg Cx\right)\right)$),
  le **particolari affermative** (tipo I: $\left(\exists x\left(Ix \wedge Cx\right)\right)$)
  e le **particolari negative** (tipo O: $\left(\exists x\left(Ix \wedge \neg Cx\right)\right)$). Ora è risaputo che i rapporti sussistenti tra queste proposizioni sono quelli illustrati nel seguente schema:

(A) $\left(\forall x\left(Ix \to Cx\right)\right)$	contrarie	(E) $\left(\forall x\left(Ix \to \neg Cx\right)\right)$
subalterne	contraddittorie	subalterne
(I) $\left(\exists x\left(Ix \wedge Cx\right)\right)$	subcontrarie	(O) $\left(\exists x\left(Ix \wedge \neg Cx\right)\right)$

- Ebbene, le formulazioni alternative delle proposizioni consentono, ad esempio, di **evidenziare in modo immediato** il rapporto di **opposizione per contraddizione** di A con O e di I con E. Infatti, sostituendo le formule delle caselle superiori con le equivalenti, si ha:

(A) $\left(\neg\exists x\left(Ix \wedge \neg Cx\right)\right)$	contrarie	(E) $\left(\neg\exists x\left(Ix \wedge Cx\right)\right)$
subalterne	contraddittorie	subalterne
(I) $\left(\exists x\left(Ix \wedge Cx\right)\right)$	subcontrarie	(O) $\left(\exists x\left(Ix \wedge \neg Cx\right)\right)$

♦ E analogamente, sostituendo, invece, le formule delle caselle inferiori:

(A) $\left(\forall x\left(Ix \rightarrow Cx\right)\right)$	contrarie	(E) $\left(\forall x\left(Ix \rightarrow \neg Cx\right)\right)$
subalterne	contraddittorie	subalterne
(I) $\left(\neg\forall x\left(Ix \rightarrow \neg Cx\right)\right)$	subcontrarie	(O) $\left(\neg\forall x\left(Ix \rightarrow Cx\right)\right)$

♦ Limite del calcolo sillogistico è **duplice:** 1) Tratta solo predicati **monoargomentali** (predicati che esprimono proprietà e non anche relazioni); 2) Non tratta proprosizioni con **molteplici quantificatori nidificati**, per la necessità di quantificare **tutte le diverse variabili** di una formula predicativa.

♦ Le **regole d'uso** per i quantificatori, nel caso di predicati a più di un argomento sono le seguenti:

1. Quando una funzione contiene diverse variabili, per una quantificazione completa, occorre **assegnare un quantificatore a ciascuna di esse.**

P.es., nel caso di due variabili <*Px,y*> dove *P*≡«essere a contatto con…» → 4 possibilità: <$(\forall x,y)(Px,y)$>; <$(\forall x)(\exists y)(Px,y)$>; <$(\exists x)(\forall y)(Px,y)$>; <$(\exists x,\exists y)(Px,y)$>.

2. Quando diverse variabili sono quantificate dal **medesimo** quantificatore **è lecito scambiarli di posizione** senza che cambi il senso della proposizione, ovvero porre le variabili come argomento di un **unico quantificatore.**

$$(\forall x)(\forall y)(Px,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)(Px,y) \leftrightarrow (\forall x,y)(Px,y)$$

3. Viceversa, quando diverse variabili sono quantificate da **diversi** quantificatori, **non è lecito scambiarli di posizione**, senza cambiare il senso della proposizioné. P.es., se <*Rx*> sta per «essere a contatto con»:

$$(\forall x)(\exists y)(Rx,y)$$

Vuol dire «ogni corpo è a contatto con qualche corpo» («Per ogni corpo, esiste almeno un corpo con cui è a contatto»).
Invece:

$$(\exists y)(\forall x)(Rx,y)$$

Vuol dire invece che «qualche corpo è a contatto con tutti gli altri» («Esiste almeno un corpo tale che è in contatto con tutti»).

8.3.3. Teoria dei gradi semantici (dei tipi)

- Negli esempi dati finora ci siamo sempre mossi entro il **calcolo dei predicati del primo ordine,** dove gli argomenti dei predicati e quindi dei quantificatori sono sempre **variabili terminali,** termini che denotano individui.

- Nel calcolo dei predicati del **secondo ordine**, gli argomenti di predicati e quantificatori possono invece anche essere **variabili predicative**, ovvero simboli che denotano predicati, in quanto possono essere argomento di un predicato di ordine logico più alto.
- P.es., tesi tipica della logica dei predicati è il cosiddetto **principio degli indiscernibili** formulato da Leibniz secondo il quale «due individui sono **identici** se tutti i predicati che convengono ad uno convengono ad uno convengono anche all'altro», ovvero:

$$(x = y) := (\forall P)(\forall x, y)(Px \leftrightarrow Py)$$

- Dal punto di vista **ontologico** è chiaro che tutte le ontologie che considerano gli universali come **entità reali** (concettualismo, logicismo, naturalismo) devono necessariamente poter considerare i predicati come altrettanti possibili argomenti di quantificatori e predicati del **secondo ordine**.
- Viceversa tutte le **ontologie nominaliste** che considerano gli universali come convenzioni linguistiche, dovranno vietare l'uso dei quantificatori al secondo ordine: esistono solo **individui.** Ovviamente, andando contro una falsa convinzione molto diffusa fra filosofi che disdegnano la logica, il platonismo (= realismo logicista) non è l'unica alterantiva al nominalismo…
- La distinzione fra i diversi ordini di predicazione → nozione di **categorie e gradi semantici.**
- **Categorie semantiche.** Per garantire che le proposizioni del calcolo dei predicati siano **dotate di senso**, è fondamentale che le costanti con cui sostituire le variabili argomento dei predicati appartengano alla **medesima categoria** semantica.
    - P.es., nella funzione proposizionale «*x* fuma», per ottenere una **proposizione,** vera o falsa che sia, *x* può essere sostituita solo con termini della medesima categoria semantica, in questo caso con **nomi** (p.es., «locomotiva», «carta»,

«farfalla», etc.) non con verbi. Infatti, «la locomotiva fuma», «la carta fuma», «la farfalla fuma», sono tutte proposizioni dotate di senso, anche se solo le prime due, in un contesto appropriato, hanno la possibilità di essere vere, mentre la terza è certamente falsa. Invece se sostituissimo *x* con un verbo, «amare», «bere», etc. otterremmo proposizioni prive di senso: «ama fuma», «beve fuma», etc.

- → Due termini appartengono alla medesima **categoria semantica** sse sostituiti **alla stessa variabile** otteniamo comunque proposizioni dotate di senso.
- → Una variabile può essere validamente sostituita solo da termini appartenenti **ad una sola categoria semantica.**

♦ **Gradi semantici.** Per ottenere proposizioni dotate di senso è indispensabile che il predicato appartenga ad un **grado semantico più alto** del suo argomento:

- **Al I grado** appartengono nomi di individui;
- **Al II grado** appartengono espressioni composte da predicati e argomenti del I grado.

- **Al III grado** appartengono espressioni composte da predicati, almeno un argomento del II grado e, eventualmente anche argomenti del I grado, etc.
- **P.es.,** la classica antinomia semantica del «mentitore» («Io mento»: se mente dice il vero, se dice il vero allora mente), conosciuta fin dal tempo dei sofisti che l'hanno ideata, dipende dal fatto che nell'espressione non si distinguono bene i gradi semantici coinvolti, come invece lo sono nella seguente espressione: «Io dico: "Ho mentito"». La distinzione dei gradi semantici è evidenziata dalle virgolette interne.

8.4. Limiti della formalizzazione e implicazioni per l'ontologia

- È chiaro che la filosofia ed in particolare l'ontologia e la metafisica, in quanto scienze dimostrative, sono generalmente **teorie del secondo ordine** in quanto i loro asserti hanno per argomenti non tanto enti individuali generici, ma gli stessi generi, ovvero quei predicati che nelle corrispettive teorie del primo ordine svolgono il ruolo di costanti predicative e non di argomenti di essi.

- P.es., gli asserti delle **scienze biologiche** in quanto teorie del primo ordine hanno per argomenti gli **organismi viventi o i loro costituenti con le loro proprietà**, le varie **filosofie o ontologie della biologia** (p.es., la "teoria dell'evoluzione") hanno per argomento **la vita stessa** e quelle **proprietà**.

- Senza poter andare in profondità qui nella questione, bisogna ricordare che, quando abbiamo a che fare con **teorie formalizzate**, per i teoremi di Gödel — ed i connessi teoremi di Skolem e di Dedekind —, esiste una sorta di **relazione d'indeterminazione,** fra **forza dimostrativa** (completezza del calcolo logico soggiacente) e **capacità espressive** (categoricità) delle teorie al primo e al secondo ordine.

- Per capire almeno in forma iniziale questa affermazione, bisogna ricordare che i teoremi di Gödel di **incompletezza delle teorie assiomatizzate del primo ordine** del 1931, hanno come condizione necessaria la dimostrazione da parte di Gödel stesso della **completezza del calcolo logico dei predicati C del primo ordine** (e incompletezza del calcolo dei predicati del secondo ordine) **,** ottenuta nel 1929.

- **Corollario** dei teoremi di Gödel è il cosiddetto **teorema di Skolem**, ovvero il teorema importantissimo che dimostra che **se è una teoria è incompleta** è anche **non-categorica**, ovvero tutti i modelli costruibili della teoria non sono riportabili ad un'unica struttura formale (non sono cioè **isomorfi** fra di loro)[iii]. → Il senso di **mancanza di unitarietà** delle teorie scientifiche **non è cioè casuale**, ma dipende dalla potenza dimostrativa del calcolo formale (metodo dimostrativo: calcolo dei predicati del primo ordine) che usano.
- **Viceversa** il teorema di Dedekind aveva dimostrato, prima dei teoremi di Gödel e di Skolem, che l'aritmetica del secondo ordine, e quindi ogni teoria formalizzata del secondo ordine (cfr. nota iii), è **categorica**, anche se per i susseguenti teoremi di Gödel e Skolem, ciò significa che tale espressività dipende dal fatto che è basata su un calcolo del secondo ordine, più debole di quello del primo ordine.

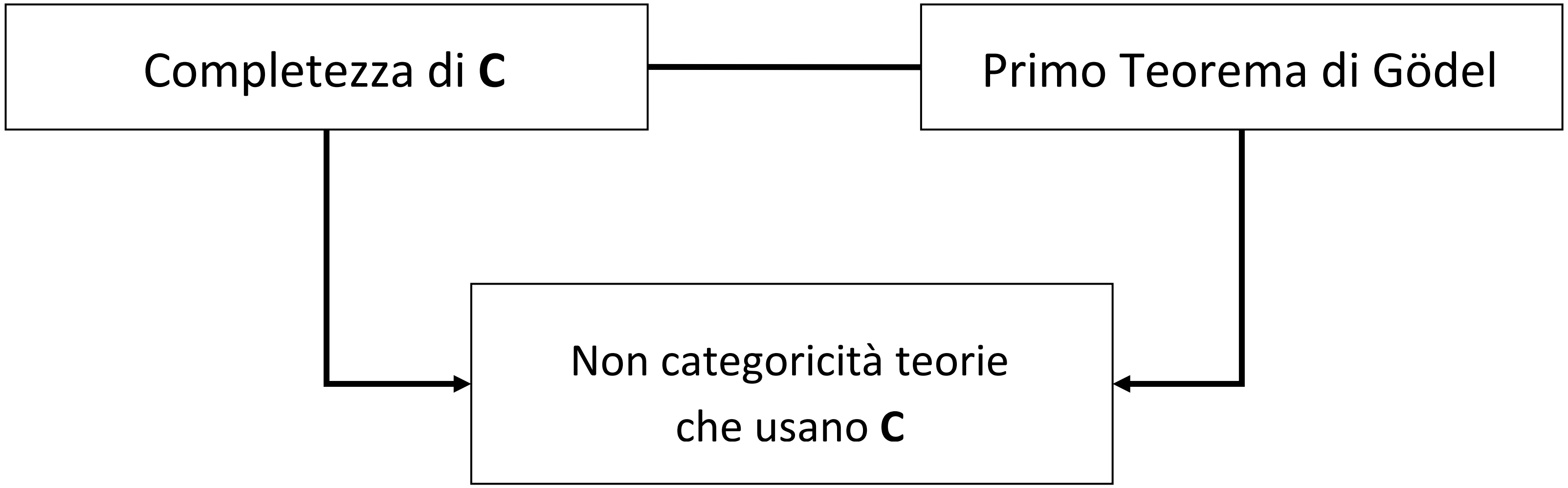
♦ → **Di qui la seguente relazione d'indeterminazione** (Ennio De Giorgi)**:**

- **Se una teoria formalizzata** è basata su un metodo dimostrativo molto potente (Calcolo dei predicati del primo ordine), perde in **unità esplicativa** (è non-categorica) → Teorie del **primo ordine** (p.es., teorie scientifiche matematico-sperimentali, in quanto modelli empirici di sistemi formali)

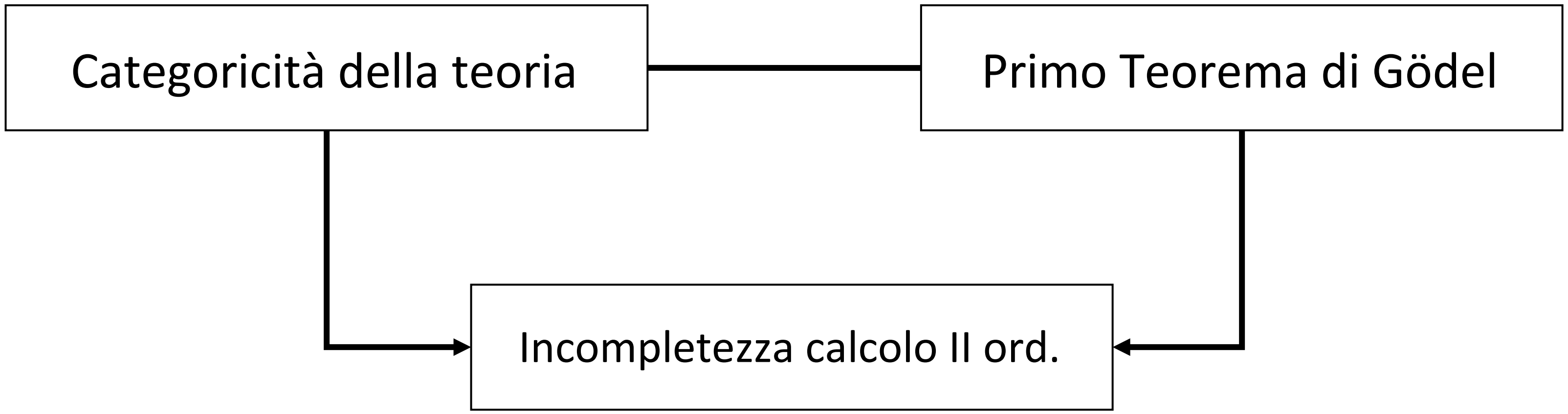
- **Se una teoria formalizzata** è categorica, dotata di una grande, unitaria ampiezza esplicativa, vuol dire che è basata su un metodo dimostrativo meno potente (calcolo dei predicati del secondo ordine) → Teorie del **secondo ordine** (p.es., teorie logiche e matematiche del secondo ordine, teorie dei fondamenti delle varie discipline scientifiche, teorie di discipline umanistiche, anche filosofiche).

♦ Questo limite intrinseco alla formalizzazione significa che, sebbene esso sia un metodo da seguire per aiutare la comprensione reciproca anche a livello di teorie filosofiche, dobbiamo essere consapevoli del limite di tale metodo → scegliere volta per volta il miglior compromesso fra **forza dimostrativa** e **capacità (ampiezza) esplicativa** della teoria.

♦ Schematizzando, per le teorie basate sul calcolo dei predicati del primo ordine **C,** in base al teorema di Skolem:



♦ In base al **teorema di Dedekind** abbiamo invece una mancanza di forza dimostrativa, imputabile al calcolo dei predicati del secondo ordine, per le teorie dotate di maggior capacità esplicativa:



♦ Lo stato dell'arte della logica formale contemporanea ci assicura così che il processo di formalizzazione o assiomatizzazione delle teorie è un processo da una parte necessario dall'altra inesauribile. Detto nei termini di Gödel: «ciò che possiamo conoscere è molto più di quanto possiamo dimostare»…

Indice della II Parte

QUESTIONI DI LOGICA I DALLA LOGICA FORMALE ALL'ONTOLOGIA FORMALE PARTE II: CENNI DI LOGICA DELLE PROPOSIZIONI E DEI PREDICATI SCHEMI AD USO DEGLI STUDENTI ROMA 2009-10 54

6. SFONDO STORICO: EPISTEMOLOGIA E ONTOLOGIA DELLE SCIENZE MODERNE 55

6.1. OGGETTO FENOMENICO DELLE SCIENZE *VS.* OGGETTO ONTOLOGICO DELLA FILOSOFIA (*FNS CAP. 0)* 55
6.2. LA QUESTIONE GALILEIANA 56
6.3. NASCITA DEL METODO IPOTETICO-DEDUTTIVO (*FNS* CAPP. 3-4) 57
6.4. LOGICA FORMALE, ONTOLOGIA FORMALE, ONTOLOGIA FORMALIZZATA 59
6.5. DIVERSI SENSI E FUNZIONI DELL'ONTOLOGIA FORMALE 66
6.6. DEFINIZIONE DI ONTOLOGIA FORMALE 67

7. ELEMENTI DI LOGICA DELLE PROPOSIZIONI [GA2, 13-64] 70

7.1. CENNI DI SINTASSI 70
7.1.1. Linguaggi ordinari, simbolici, formali 70
7.1.2. Regole primitive di derivazione 74
7.1.3. Teorema di finitezza sintattica per il calcolo (k) 77
7.1.4. Regole derivabili di (k) 78
7.2. CENNI DI SEMANTICA 88
7.2.1. Definizioni preliminari 88
7.2.2. Correttezza e completezza di (k) 93
7.2.3. Teorema di correttezza del calcolo (k) 94
7.2.4. Teorema di completezza del calcolo (k) 94
7.2.5. Cenni di semantica applicata all'analisi logica delle teorie 101
7.2.6. Uso delle tavole di verità 109
7.2.7. Definizione formalizzata di una teoria 113

8. LOGICA DEI PREDICATI 119

8.1. DALLA LOGICA DELLE PROPOSIZIONI ALLA LOGICA DEI PREDICATI [BO, CAP. VII] 119
8.2. CENNI DI SINTASSI 122
8.2.1. Alfabeto 122
8.2.2. Regole di formazione 125
8.3. CENNI DI SEMANTICA 126
8.3.1. Regole di quantificazione 126
8.3.2. Regole sillogistiche 129
8.3.3. Teoria dei gradi semantici (dei tipi) 134
8.4. LIMITI DELLA FORMALIZZAZIONE E IMPLICAZIONI PER L'ONTOLOGIA 137

INDICE DELLA II PARTE 143

NOTE 145

Note

[i] Le parti del testo segnate in colore blu sono parti necessarie all’approfondimento, ma che possono essere omesse per un primo studio della materia.

[ii] Per esempio, i sensi 2. e 3. che definiamo più sotto, sono denotati da Galvan, rispettivamente come “esclusiva” e “incompatibile”, da Bochensky come “disgiuntiva” ed “esclusiva”, creando grande confusione. Praticamente si è d’accordo solo sul senso 1., che quasi tutti convengono a definire come “alternativa” o disgiunzione “non-esclusiva”. Per questo, al di là delle espressioni ambigue di **LN**, fanno fede solo le tavole di verità che rendono assolutamente non-ambigue le definizioni.

[iii] Di per sé il teorema di Skolem riguarda solo l’aritmetica formalizzata di Peano, ovvero la teoria simbolizzata e assiomatizzata dell’aritmetica, esattamente come i teoremi di incompletezza di Gödel. Ma per il teorema della codifica aritmetica di ogni linguaggio formalizzato dimostrato da Gödel stesso, nel 1929, due anni prima dei suoi due famosi teoremi di incompletezza, tali teoremi e quello di Skolem, possono essere

estesi a qualsiasi teoria formalizzata.