GIANFRANCO BASTI

LOGICA III: LOGICA FILOSOFICA E FILOSOFIA FORMALE

Parte III: Teoria delle Categorie, Dualità Algebra-Coalgebra, in Teoria Quantistica dei Campi e in Ontologia Formale

Roma 2020

SOMMARIO

7. IL PROBLEMA DEL BI-CONDIZIONALE ONTOLOGICO E LA LOGICA ALGEBRICA

7.1. Le conseguenze della (non-)soluzione moderna del problema del bi-condizionale ontologico

- L'obbligo moderno di fondare la necessità causale sulla necessità logica ha delle conseguenze **epocali** che caratterizzano il passaggio dalla filosofia classica alla filosofia moderna:

1. Passaggio dalla concezione classica di scienza come ***cognitio certa per causas,*** alla concezione moderna della ***cognitio certa per leges***;
2. Impossibilità di una **metafisica naturalista** di tipo causale (vedi la famosa opera di Kant *Prolegomeni ad ogni metafisica che in futuro vorrà presentarsi come*

scienza, tutta centrata sull'impossibilità di una metafisica naturale per l'impossibilità di una fondazione non logica della causalità):

a. Impossibilità di una **fondazione causale delle nature** dei corpi → esistenza di **un'unica natura** (Spinoza) per l'unicità delle leggi matematiche per tutte le scienze naturali;

b. Impossibilità dell'esistenza di **cause libere nel mondo naturale (**cause capaci di determinare se produrre o no un effetto: Dio, uomini…) → impossibilità di un'**antropologia** e di una **teologia naturali** → conflitto moderno fra **determinismo delle leggi di natura, libertà dell'uomo e libertà di Dio.**

c. Tentativo moderno di una teologia naturale basata sull'interpretazione di Dio come "**legislatore della natura" e non più "causa prima"** ("Dio-orologiaio" di Newton) e successiva crisi dell'idea:
   - Con l'equivalenza spinoziana **Dio-determinismo leggi di natura** (*Deus sive natura*);
   - Fondazione **concettualista** (=autocoscienza **trascendentale**) delle leggi logico-matematiche della natura e delle leggi morali (formalismo etico) nel kantismo;

- Scoperta della **natura statistica delle leggi fisiche e biologiche,** basate sull'identità di "caso e necessità", in conseguenza della **legge di Gauss sui "grandi numeri" (=teorema del limite centrale).** Nel limite infinito del numero degli elementi indipendenti *x* (p.es., molecole di un gas) di una distribuzione statistica rispetto a una certa grandezza fisica *g* (p.es., la velocità con cui le molecole si muovono in un contenitore isolato e quindi la **temperatura** di quel gas (o la sua **pressione,** o **volume)** che sono tutte "variabili termodinamiche" proporzionali alla velocità), l'integrale è **sempre definito,** avrà cioè sempre la forma "normale" di una **campana di Gauss,** la cui "moda" (max del numero degli elementi) coinciderà con la "media" del valore di una determinata **grandezza variabile** *g* definita sugli elementi della distribuzione, $g(x)$.
- Nel caso della **termodinamica dei gas di Boltzmann,** nell'esempio citato, tale grandezza è l'energia, cosicché nel limite infinito, corrisponderà in **meccanica statistica** al **minimo del potenziale energetico** $U(x)=0$ del sistema considerato (= assenza di **energia libera,** ovvero di energia potenziale per compiere un lavoro, perché la stragrande maggioranza delle particelle si

muovono con una velocità *media*). Corrisponderà cioè allo **stato di equilibrio** della III Legge di Newton **o stato di massima entropia** della termodinamica all'equilibrio di Boltzmann → "morte termodinamica" del sistema.

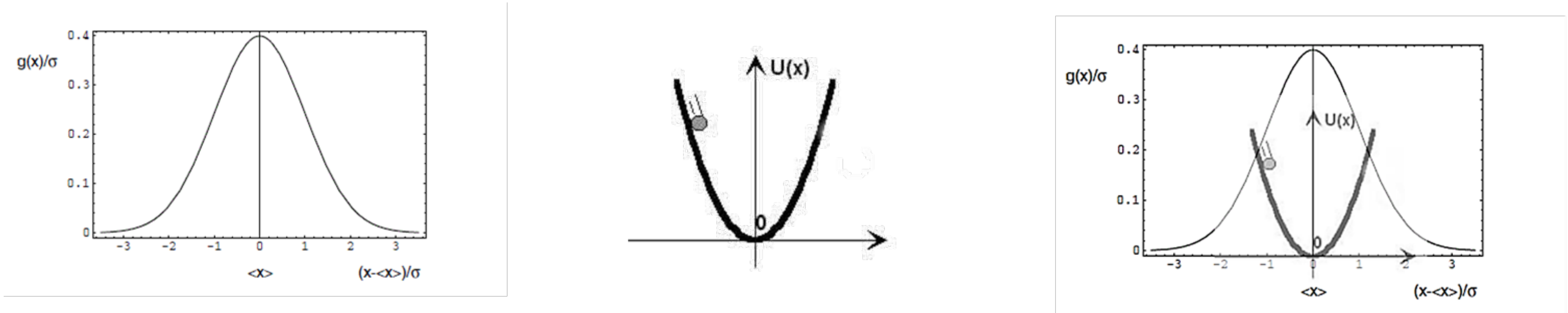


Figura 1. Distribuzione normale dove moda e media della distribuzione coincidono (sinistra). Il minimo del potenziale della funzione energia (centro), connota la stabilità all'equilibrio di un sistema termodinamico isolato a molte particelle (p.es., un gas di molecole) (destra): il massimo numero di particelle (moda) si muove con un valor medio di energia cinetica (velocità) → min di energia libera (potenziale) corrisponde al max di entropia statistica in ogni sistema all'equilibrio (meccanica statistica).

- → Stretta relazione fra meccanica classica di Newton e meccanica statistica (MS) di Boltzmann-Laplace.
  - Era stato infatti Laplace a suggerire per primo che per conciliare una "fisica a molti corpi" della meccanica statistica con "l'isolamento nel vuoto meccanico" della meccanica di Newton, occorresse studiare il sistema nella cosiddetta "condizione asintotica". **Distanziando cioè all'infinito nello spazio e nel tempo le particelle** del sistema a molti corpi, cancellando le loro interazioni così da applicare ad esso le leggi della meccanica di Newton, innanzitutto la I Legge, il **principio d'inerzia.** Quello del limite asintotico costituisce così il cuore dei cosiddetti **metodi perturbativi** della meccanica statistica, come fisica "a molti corpi" (*many-body physics*) formalizzata da Laplace
  - Ovviamente, il limite termodinamico dello **stato di equilibrio** del "caos molecolare" della teoria di Boltzmann offre una condizione equivalente visto che tutte le particelle muovendosi e urtandosi caoticamente (=**massima entropia)** compensano l'un l'altra le interazioni, muovendosi a una velocità media, annullando l'energia libera, e quindi creando

una condizione equivalente a quella della condizione asintotica. Nella condizione asintotica lo stato di equilibrio corrisponde a $T = 0$ (isolamento nel vuoto del sistema). Condizione che sarà negata dal **III Principio della Termodinamica → irraggiungibilità dello 0 assoluto (*T* = 0°K = - 273°C)** per qualsiasi sistema isolato di moli di materia (=teorema di Nernst 1906-1912, Premio Nobel 1923).

- → Interpretazione **statistica** nella **MS di Gibbs (e quindi nella *quantum mechanics* QM) –** evoluzione e sistematizzazione nel XX sec. della MS di Laplace – delle fluttuazioni attorno allo 0° dei sistemi fisici allo **stato fondamentale di minima energia** (= **vuoto quantistico (VQ),** in QM per il principio di indeterminazione) → possibilità di estendere la MS anche allo studio di sistemi fuori-dall'equilibrio, ma comunque **vicini-all'equilibrio.**

- D'altra parte, il collegamento col concettualismo kantiano è evidente visto che la misura di entropia (incertezza nella determinazione dello stato della singola particella) **dipende dall'osservatore**: per un osservatore dalle capacità infinite (demone di Laplace) non esisterebbe alcuna forma di casualità/indeterminazione e quindi nessuna entropia.

- Ruolo fondamentale del **caso/probabilità →conflitto teologia-evoluzione**: cfr. la metafora "dell'orologiaio cieco" di Dawkins. Ovvero non serve un Legislatore Intelligente (*Intelligent Designer*) per spiegare l'evoluzione in quanto basata sulla meccanica statistica, basta il Caso.
  - Tre principi dell'evoluzione darwiniana: 1) **Mutazione casuale** del genoma dell'organismo (Mendel aveva appena scoperto la natura statistica della genetica inventando il concetto di "gene"); 2) **Adattamento all'ambiente** (condizione di stabilità all'equilibrio con l'ambiente), 3) **Selezione naturale** come selezione del "più adatto".
- Involuzione **volontarista del concettualismo trascendentalista** (Schopenhauer, Nietzsche) → nihilismo e relativismo contemporanei…

7.2. La visione pionieristica del “naturalismo semiotico” di Peirce

- La centralità della **meccanica statistica** tanto in fisica fondamentale anche quantistica (*quantum mechanics,* QM) quanto in chimica e biologia ci fa tanto più apprezzare il naturalismo di Peirce che trova nella stessa fisica fondamentale la controparte fisica della sua algebra triadica delle relazioni in logica, così da far definire dai suoi studiosi la sua posizione un **naturalismo semiotico.**
- Ecco un passo dei suoi Manoscritti in cui egli estende la sua **teoria triadica delle categorie algebriche (*firstness, secondness, thirdness*)** che sono ante-predicative, ovvero precedono e fondano le **categorie logiche** di qualsiasi filosofia (p.es., Aristotele, Kant) dal linguaggio al mondo naturale, così da offrire una ipotesi pionieristica di una **cosmologia evolutiva in cosmologia** che riguarda la stessa costituzione delle leggi matematiche della fisica, contro il **determinismo basato sull’osservatore** della meccanica classica (Newtoniana) e statistica (Laplaciana) da cui il trascendentalismo kantiano dipende direttamente. Ecco il suo testo del

1886 che in qualche modo vorrebbe giustificare il suo **realismo naturalista neo-Aristotelico basato sulla semiotica**:
“We have to suppose that in looking into the indefinite past we are looking into back towards times when the element of law played an indefinitely small part in the universe. If the universe is thus progressing from a state of **all but pure chance** to a state of **all but complete determination by law**, we must suppose that there is **an original, elemental, tendency of things to acquire determinate properties**, to take habits. This is the **Third** or mediating element between chance, which brings forth **First** and original events, and law which produces sequences or **Seconds**. Now this tendency to take habits is something essentially finite in amount, an infinitely strong tendency of this sort (unlike an absolute conformity to law) is inconceivable and self-contradictory. Consequently, this tendency must itself have been gradually evolved; and it would evidently tend to strengthen itself. Here is a rational physical hypothesis, which is calculated to account, or all but account for everything in the universe except pure originality itself (Peirce, 1886, MS [R] 897).

- Vedremo come questa visione tendente a dare una giustificazione dinamica “in-dipendente dall’osservatore” sia dell’indeterminazione, sia della tendenza all’emergenza di strutture ordinate della materia (=rottura di simmetria del campo originario, fino alle stesse leggi matematiche della natura, ha nella cosmologia della QFT basata sulla nozione di **stato fondamentale con $T > 0$ (=fuori dall’equilibrio) dei campi quantistici** ovvero la cosiddetta **interpretazione termica (non statistica) della condizione di VQ** (*quantum vacuum*, QV: $|0\rangle$) la sua attuale realizzazione.

7.2.1. Dalla semiotica formale di Peirce alla Teoria delle Categorie

- Anche se non possiamo approfondirla qui, è nota presso gli storici della matematica lo stretto rapporto esistente fra la **semiotica triadica** di Peirce all’interno della sua **algebra triadica delle relazioni** (Peirce, 1886; 1897), e l’assiomatizzazione dell’intuizione di Peirce operata da Tarski (Maddux, 1991), culminata nella scrittura di un **calcolo formale delle relazioni** (Tarski, 1941; 1948).
- Di questo calcolo Tarski e i suoi collaboratori hanno dato delle significative applicazioni, sia

1. In logica, sviluppando l'**algebra booleana con operatori** che già abbiamo incontrato (Jónsson & Tarski, 1952a; 1952b) dimostrando in questo modo che la logica booleana è l'unico frammento **semanticamente completo** di una logica del primo ordine.
2. Nei fondamenti della teoria degli insiemi, dimostrando che **un'algebra triadica delle relazioni** è sufficiente per riscrivere qualsiasi teoria degli insiemi (Tarski & Givant, 1987; Givant, 2006).

- Tutto questo, insieme all'uso sistematico **dell'algebra degli operatori** e del connesso **formalismo topologico** in fisica, sia classica che quantistica (cfr. (Landsman, 2017) per una sintesi aggiornata) all'attuale sviluppo della **Teoria delle Categorie** (TC) (Mac Lane, 1998; Awodey, 2010; Abramsky & Tzevelekos, 2011), come metalinguaggio per la matematica e la logica pure ed applicate, in molti sensi più ampia della **Teoria degli Insiemi**, come vedremo subito.
- Per i nostri scopi, grazie alla TC è possibile fornire una versione formalmente consistente della **dualità fra necessitazione causale e logica** come fondamento di un'ontologia del Realismo Naturale, oggetto – anche se in versione ridotta della Parte IV del corso.

7.3. Dualità in matematica, fisica e logica

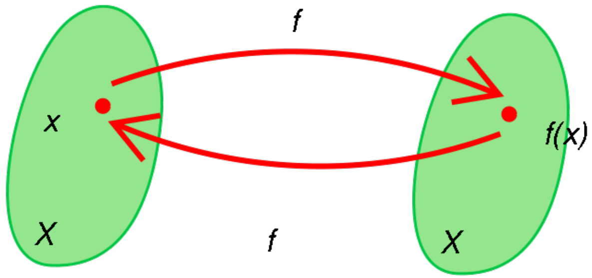
7.3.1. Dualità in fisica, matematica e logica

- Il concetto di **dualità** è largamente usato sia in matematica, teorica e applicata – soprattutto in fisica-matematica –, che in logica.
- Uno dei maggiori matematici del XX secolo recentemente scomparso, Medaglia Field per la matematica 1986, l'indiano M. Atiyah, in uno scritto che viene unanimemente definito come una delle migliori sintesi al riguardo[1] anche se si limita ad alcune dualità solo in matematica e fisica, senza citare le dualità in logica, così inizia il suo saggio:

La dualità in matematica non è un teorema, ma un "principio". Ha un'origine semplice, è molto potente e utile ed ha una lunga storia che va indietro di centinaia di anni. Nel tempo è stato adattato e modificato e così noi oggi l'usiamo in nuove situazioni. Essa appare in molti soggetti, sia in matematica (geometria, algebra, analisi), che in fisica. Fondamentalmente la dualità ***fornisce due differenti punti di vista per guardare allo stesso oggetto.*** *Vi sono molte cose che hanno due differenti punti di vista e, in linea di principio, sono tutte dualità.*

- ♦ Questa impostazione della nozione di dualità in Atiyah è congruente con **l'approccio assiomatico** alla nozione di dualità della matematica moderna dove **l'inversione delle relazioni** che caratterizza la nozione di dualità in logica e matematica, come vedremo subito, è legata a un'inversione delle relazioni fra le strutture logiche e matematiche coinvolte, che dipende dagli assiomi stessi della teoria, visto che gli assiomi garantiscono un **isomorfismo** fra le strutture stesse.
- ♦ Invece **nella Teoria delle Categorie** la dualità fra le strutture è **funtoriale,** legata cioè ad una particolare **mappa** ($\longmapsto$) **che mantiene la struttura o omomorfismo** F fra categorie di strutture algebriche, anche se inverte tutte le relazioni (**morfismi** $f: A \rightarrow B$) e le **composizioni di morfismi** $(g \circ f)$, un omomorfismo che solo se invertibile a sua volta, sotto particolare condizioni, è anche un **isomorfismo**, come vedremo nella Sez. 8.
- ♦ In ogni caso, generalmente con "dualità" s'intende **in matematica** la traducibilità in una relazione uno-a-uno di concetti, teoremi, strutture in altri concetti, teoremi o strutture attraverso (ma non sempre) operazioni di **involuzione,** così che se il duale di A è B, il duale di B è A.

➢ In matematica, un'involuzione è una funzione che è la sua **propria inversa**, cioè: <$f\,(f(x)) = x$>, cosicché quando applicata due volte riporta al suo punto di partenza: f: $X \rightarrow X$, cioè:



♦ In teoria delle funzioni la madre di tutte le dualità è la relazione duale esistente fra una funzione f e la sua **trasformata di Fourier** $\hat{f}$ (FT) È una trasformazione che si applica praticamente **ovunque** in matematica, fisica (classica, statistica, e, soprattutto, quantistica) ed in qualsiasi branca dell'ingegneria, innanzitutto nella **teoria dei segnali, della comunicazione, e in computer science.**

♦ Essa decompone una funzione d'onda $f\,(t)$ (graficamente, un'onda continua) nelle sue **frequenze componenti.** P.es., in acustica, un accordo musicale nei volumi e frequenze delle note componenti.

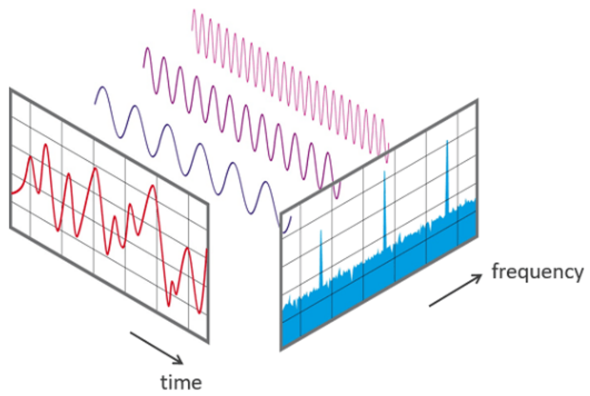


Figura 2. Scomposizione di un'onda complessa nelle sue frequenze componenti usando la FT.

- ♦ Per fare un altro esempio, un'applicazione della FT che usiamo tutti sul computer è il compressore di file **senza perdite (*lossless*) *pkzip* (LZW).** Un file, infatti, non è altro che una sequenza di bit con determinate **ricorrenze, frequenze.** Applicando la FT, invece delle sequenze ricorrenti (frequenze) di bit viene memorizzato il **coefficiente unico** per ciascuna di essa (=compressione). Applicando la FT in senso inverso, si riottiene esattamente la sequenza di bit originale (=decompressione).

- ♦ Un'altra proprietà fondamentale della FT è che essa non si applica soltanto alle onde e alle frequenze che sono funzioni $f(t)$ in **dinamica e teoria dei campi** (p.es., "meccanici" nei suoni, "elettromagnetici", etc.), ma anche a frequenze e distribuzioni (funzioni d'onda) **statistiche.** Infatti, se la funzione $f(x)$ è una **gaussiana**: $f(x) = \exp(-x^2)$, anche la sua trasformata di Fourier $\hat{f}(x)$ è una **gaussiana.** Di qui la centralità della FT in tutto il formalismo matematico della meccanica statistica e della fisica quantistica.
- ♦ Infatti, in QM le **funzioni d'onda statistiche** delle due variabili coniugate p (quantità di moto) e x (posizione) sono coppie di trasformate di Fourier, entro il fattore della costante di Planck.
- ♦ Ma di qui, però, anche le **esiziali confusioni** che spesso nascono a livello divulgativo (e non solo) fra funzioni d'onda **statistiche** in meccanica statistica e in QM**,** e le funzioni d'onda di **campi di forze fisici** in teoria dei campi e in QFT**,** visto che il medesimo formalismo della FT si applica ad ambedue.

♦ Il concetto di dualità in **Teoria Degli Insiemi** è strettamente legato alla **teoria dell'ordinamento,** sono così esempi di **dualità** le seguenti relazioni:

1. Le relazioni di **super-insieme/sotto-insieme**, $\supset$/$\subset$, in qualsiasi collezione di insiemi;
2. Le relazioni di **divisore/multiplo** definite su insiemi di numeri interi;
3. Le relazioni di **antenato/discendente** definite su insiemi aperti.

- In **Logica** "le madri di tutte le dualità" sono le due fondamentali **leggi di De Morgan** di logica delle proposizioni, riguardo i tre connettivi logici di **congiunzione**, **disgiunzione**, **negazione** cui, non casualmente, corrispondono i tre fondamentali **operatori insiemistici** di **intersezione, unione, complementazione** che definiscono una **logica di Boole,** e quindi la fondamentale equivalenza fra **logica proposizionale e logica equazionale** che già abbiamo visto.
- **Informalmente,** le due leggi si leggono:

1. **non(*A* o *B*)** è lo stesso che **(non*A*) e (non*B*)**
2. **non(*A* e *B*)** è lo stesso che **(non*A*) o (non*B*)**

- Formalmente:

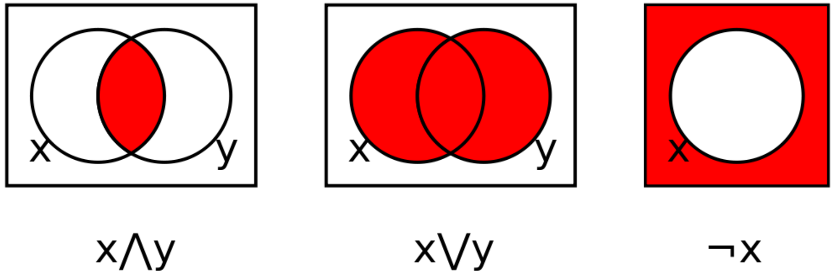
1. $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$
2. $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$

- ♦ Dalla fondamentale dualità espressa dalle leggi di De Morgan, altre fondamentali dualità logiche sono quelle:

1. Fra **quantificatore universale** e **quantificatore esistenziale,** in logica dei predicati data la stretta relazione fra il primo e la **congiunzione delle proposizioni quantificate** e fra il secondo e la **disgiunzione delle proposizioni quantificate**, ambedue in un determinato modello, ovvero:
   Dato che $\forall x\, Px \Leftrightarrow (Pa \wedge Pb \wedge Pc)$ e $\exists x\, Px \Leftrightarrow (Pa \vee Pb \vee Pc)$, per le leggi di De Morgan derivano immediatamente le dualità – fra l'altro alla base dello stesso quadrato delle opposizioni logiche di Aristotele:
   $\forall x\, Px \Leftrightarrow \neg\exists\, x\, \neg Px$
   $\exists x\, Px \Leftrightarrow \neg\forall\, x\, \neg Px$
   Quindi, data la stretta interconnessione fra i quantificatori e gli **operatori di logica modale**, due altre dualità fondamentali derivano, quelle:
2. Fra **gli operatori di necessità/possibilità** in logica modale, ovvero:
   $\Box p \Leftrightarrow \neg\Diamond\neg p$
   $\Diamond p \Leftrightarrow \neg\Box\neg p$

7.3.2. Dualità nella logica di Boole e in logica proposizionale

- Poiché tutti i connettivi logici possono essere derivati dai tre principali ($\wedge,\vee,\neg$) coinvolti nelle leggi di De Morgan (cfr. sopra §4.5.1) si comprende come essi costituiscano **la caratterizzazione** (*signature*) di un'algebra di Boole con operatori definiti su insiemi (*Boolean Algebra with Operators,* BAO), e dove quindi i simboli (0,1) costituiscano altrettante valutazioni sulle corrispondenti proposizioni: ($\top,\bot,\wedge,\vee,\neg$).



- Per completare il quadro, e capire immediatamente la connsessione fra logiche di Boole e TCS, ecco gli schemi delle principali **porte logiche (*logical gates*)**, implementabili in altrettanti circuiti di un calcolatore, corrispondenti ai fondamentali **connettivi logici** (o predicati proposizionali) della logica delle proposizioni:

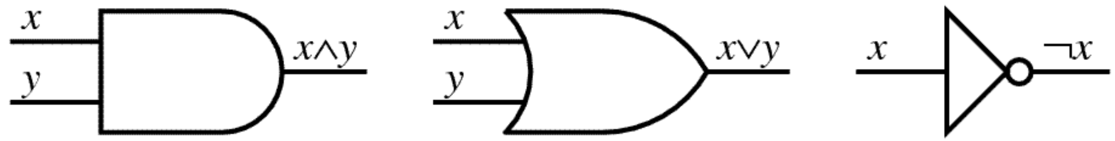


Figure 3. Logic gates

♦ E le due porte logiche corrispondenti alle **due leggi di De Morgan**:

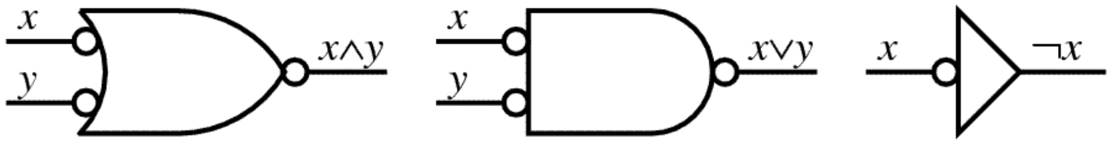
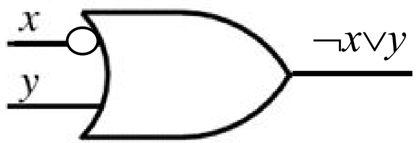


Figure 4. De Morgan equivalents

♦ Per completare, il quadro, occorre inserire anche **porta di implicazione ($\neg x \vee y$)**, recentemente implementata, sia in ingegneria elettronica, che in bioingegneria:



♦ Di qui il seguente schema riassuntivo di tutte le principali **operazioni logiche** di logica delle proposizioni, con i relativi **diagrammi di Venn,** in quanto tutte incluse nel corrispondente **diagramma di Hasse:**

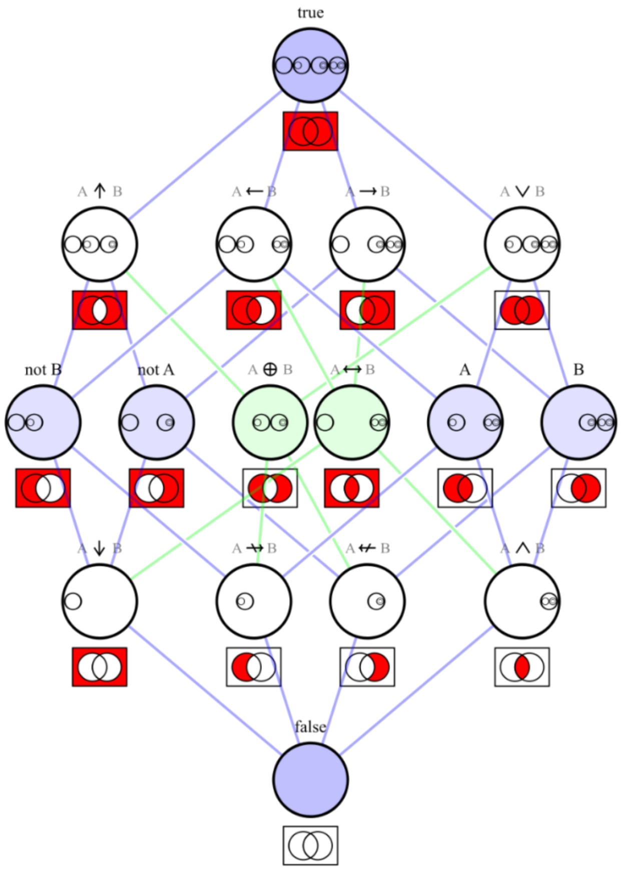


Figura 3. Diagramma di Hasse di un lattice Booleano di connettivi logici (Cfr. Figura 5).

7.4. La logica di Boole nella cosiddetta "era di Stone"

7.4.1. Spazi topologici e insiemi aperti e chiusi

- ♦ Per comprendere il fondamentale **teorema di rappresentazione di Stone per algebre di Boole** dobbiamo prima introdurre alcune nozioni fondamentali di **topologia.**
- ♦ **Storicamente,** la topologia come fondamentale branca della matematica, risale alla *analysis situs* di Leibniz come studio di determinate **proprietà qualitative** degli spazi geometrici, essendo il *situs* (in quanto distinto dalla categoria dello *spazio*) una delle dieci **categorie aristoteliche** con cui lo Stagirita designava relazioni di ordine fra enti **non quantificabili** e quindi non riducibili a quelle spaziali metriche (p.es., nella Scolastica, le diverse gerarchie di enti anche spirituali (angeli) occupavano differenti "siti").
- ♦ Nell'uso moderno, la topologia può definirsi formalmente come

*Lo studio delle proprietà qualitative di un certo tipo di oggetti (chiamati **spazi topologici**) che sono invarianti sotto un certo tipo di trasformazioni (chiamate mappe continue), specialmente quelle proprietà che sono a loro volta invarianti sotto un* *certo tipo di trasformazioni (chiamate* ***omeomorfismi*** o **isomorfismi fra spazi topologici**) *da non confondersi con gli* ***omomorfismi*** *che sono invece* ***mappe*** ($\mapsto$) ***che mantengono la struttura.*** Essi solo se **reversibili,** ovvero se il mapping può applicarsi nei due sensi, sono anche **isomorfismi** (cfr. §8.1.3).

- Con topologia si intende anche, insiemisticamente, una determinata **struttura algebrica** imposta su un determinato insieme di punti X che caratterizza l'insieme stesso come **spazio topologico** determinando certe sue proprietà come **convergenza, connessione, continuità** sotto determinate trasformazioni → generalità della nozione di "spazio topologico" come una delle nozioni più unificanti nell'attuale matematica.
- Infatti, l'intuizione fondamentale che sta dietro alla topologia è che alcuni problemi geometrici non dipendono dalla forma degli oggetti, ma dal modo in cui le parti sono **connesse.** → Uno dei primi lavori di topologia moderna fu la pubblicazione di L. Eulero sui "sette ponti di Könisberg" che dimostrava come non fosse possibile disegnare un tragitto continuo che li attraversasse tutti passando su ognuno una sola volta. Un'impossibilità che dipendeva non dalla loro lunghezza o distanza, ma dalla **connettività:** da come connettevano isole e rive del fiume.

- ♦ Così costituisce un famoso esempio di **omeomorfismo** o di deformazione continua di uno spazio senza “tagli” o “incollaggi”, quella che trasforma una “ciambella” in una “tazza” e viceversa.
- ♦ Un altro esempio di deformazione continua dello spazio è quella che dà luogo alla famosa “stringa di Möbius” etc.

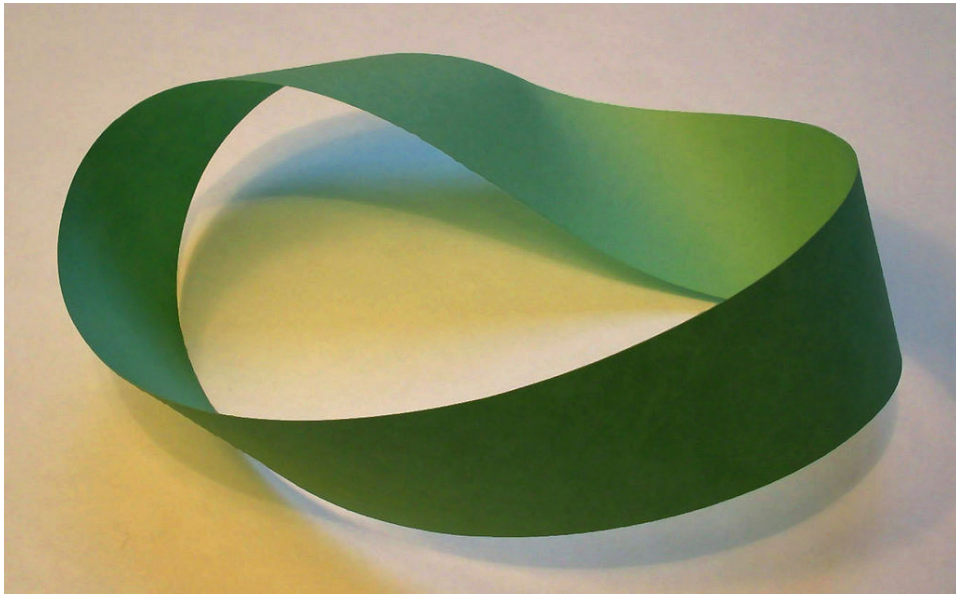


Figura 4. Nastro di Moebius

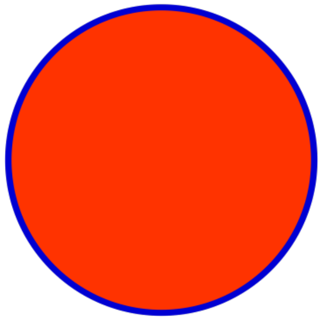
- In **teoria degli insiemi,** dato che una topologia definisce un particolare tipo di relazione che gli elementi dell'insieme possono avere fra di loro, differenti topologie possono definirsi sullo stesso insieme X determinando differenti **spazi topologici.** P.es., **la retta dei numeri reali, il piano complesso (retta reali+retta immaginari) e l'insieme di Cantor** possono essere pensati come uno stesso insieme con **differenti topologie**.
- Formalmente, sia X un insieme e sia τ una famiglia di sottoinsiemi di X. τ si definisce come **topologia su *X*** se:

1. Sia **l'insieme vuoto che l'insieme *X*** sono elementi di τ;
2. Ogni **unione** di elementi di τ è elemento di τ;
3. Ogni **intersezione** di un numero finito di elementi di τ è elemento di τ.

- Se τ è una topologia su X, allora la coppia (X, τ) è definita uno **spazio topologico** → diversi tipi di **spazi topologici** in base agli assiomi che ne definiscono le proprietà e quindi anche le proprietà delle algebre che definiscono le **operazioni o trasformazioni** su di essi → **algebra degli operatori.**
- I membri di τ sono definiti **insiemi aperti** di X. Un sottoinsieme di X è definito **chiuso** se il suo complemento è in τ (cioè se il suo complemento è aperto).

Quindi, un sottoinsieme di X può essere: aperto (***opset***), chiuso (***closet***), o ambedue (***clopset***), o nessuno dei due.

- Infatti, le due nozioni di insieme "aperto" e "chiuso", sebbene **complementari, non sono mutualmente esclusive**: un insieme aperto può essere infatti chiuso da un altro insieme aperto, essere cioè un clopset.
- L'insieme X e l'insieme vuoto sono sempre clopset. Un opset che contiene un punto x è definito come **un intorno di *x***.
- Per familiarizzarci con la nozione di opset, possiamo concentrarci intuitivamente sui punti che definiscono un cerchio.



- I punti (x, y) che soddisfano $x^2+ y^2=r^2$ sono colorati in blue e formano un insieme di confine, clopset chiuso a destra **(*x,y*]**. I punti che soddisfano $x^2+ y^2<r^2$ sono colorati in rosso e formano un insieme aperto di clopset, aperti chiusi da altri aperti

(x, y). L'unione dei punti in rosso e in blue sono un insieme chiuso (= chiusi perché il loro complemento (punti che **non appartengono** al cerchio è aperto): il cerchio.

- Il concetto di **insieme aperto** è in ultima analisi una generalizzazione del concetto di **intervallo fra due numeri** sulla retta dei reali $\mathbb{R}$ (che include naturali, razionali, irrazionali e trascendenti). P.es., l'intervallo [0,1] (inclusi gli estremi) è un intervallo (insieme) **chiuso** sulla retta dei numeri razionali, $[0,1]\cap\mathbb{Q}$**.**
- Invece, è un intervallo (insieme) **aperto** sulla retta dei reali $(0,1)\cap\mathbb{R}$**.** Dove si noti il simbolismo (x,y) per denotare insiemi aperti, [x,y] per denotare insiemi chiusi, (x,y] per denotare un clopset aperto a sinistra, [x,y) per denotare un clopset aperto a destra, etc.
- Infine, distinguiamo vari tipi di spazi topologici secondo le diverse proprietà che li caratterizzano, assiomaticamente definiti.
- Per concludere, i concetti di opset e spazio topologico sono estremamente duttili e si prestano a differenti assiomatizzazioni, una di queste è quella fondamentale per noi legata al teorema di Stone per le algebre di Boole.

7.4.2. Teorema di rappresentazione di Stone per algebre di Boole

- Molti sviluppi della TCS negli ultimi decenni dipendono dal fondamentale contributo del matematico americano Marshall H. Stone (1903-1989) col suo famoso **teorema di Stone** (1936)[2], più esattamente il suo **teorema di rappresentazione per algebre di Boole –** dove, con "rappresentazione" s'intende in matematica un **isomorfismo o corrispondenza biunivoca** (biiettiva e reversibile nel caso di insiemi) fra due strutture con i loro oggetti, tale che l'una può dirsi rappresentazione dell'altra.
- Un risultato cui Stone fu portato da un altro, precedente teorema, che lo rese famoso perché su di esso si fonda il formalismo della MQ, il cosiddetto **teorema di Stone-Von Neumann** (1931), fondamentale per il formalismo della meccanica quantistica (QM), in quanto basato sugli spazi di Hilbert.
- Il legame fra i due teoremi è dato dal fatto che **le topologie** che soggiacciono alle sub-algebre associate agli spazi di Hilbert – le cosiddette **C*-algebre** – e quelle delle rappresentazioni per algebre di Boole **sono le stesse.**
- Il risultato di Stone del 1936 fu dunque di altrettanta importanza nella TCS, quanto quello del 1931 per la QM tanto che gli studiosi parlano di una "nuova

era” nella TCS, **l’era di Stone**, o *the Stone Age,* appunto, con uno scherzoso gioco di parole (tutt’altro che una “età della pietra”…), inaugurata da questo teorema nel campo dello studio delle logiche di Boole e quindi dell’intera logica, sia algebrica, che matematica, che computazionale, che filosofica, come vedremo[3].

- Sostanzialmente il teorema introduce **quell’equivalenza fra un’algebra di Boole e un reticolo definito** su un insieme parzialmente ordinato di insiemi chiusi-aperti o clopset. Un’equivalenza che già abbiamo ricordato nell’illustrazione iniziale della logica di Boole in §4.2.
- L’enunciato rigoroso del teorema di Stone e più ancora la sua dimostrazione sono al di là delle nostre possibilità. Intuitivamente si può dire che esso associa un’algebra di Boole B al suo **spazio topologico** $S(B)$, chiamato **spazio di Stone.**
- Come sappiamo, con “topologia” o “spazio topologico” si intende in matematica **un insieme di punti con i loro intorni** che soddisfano determinati assiomi, innanzitutto quello di essere uno spazio “senza strappi” e senza necessariamente avere una metrica definita su di esso, anche se ha ovviamente un ordinamento. Generalmente condizioni soddisfatte dall’essere uno spazio topologico definito su insiemi aperti.

- Ed infatti $S(B)$ è generato da una **base** – ovvero, una collezione di insiemi chiusi-aperti (clopsets) tale che ognuno degli elementi dello spazio può essere scritto come unione di elementi della base – che consiste di tutti insiemi della forma:

$$\{x \in S(B) \mid b \in x\}$$

Dove b è un elemento di B.

- I punti in $S(B)$ sono **gli ultrafiltri su *B*,** o equivalentemente **gli omomorfismi** (= mappe che mantengono la struttura, cfr. §8.1.3) **da *B* ad un'algebra di Boole a due elementi**. Cerchiamo di capire almeno intuitivamente questa definizione perché importante per noi.
- Un ultrafiltro è un **filtro massimale** di un dato insieme, ovvero il massimo sottoinsieme **parzialmente ordinato** (= **massimo filtro**) dell'insieme-potenza di un dato insieme **con l'esclusione dell'insieme vuoto ∅ (**Cfr. **Figura 5)**.
- Per esempio, dato il reticolo P che rappresenta l'insieme potenza dell'insieme S di 4 elementi {1,2,3,4}, ordinato in base alle inclusioni in un grafico di Hasse, i sottoinsiemi indicati in verde nella figura costituiscono un filtro massimale a partire

dall'**elemento principale** $\uparrow\{1\}$, dove con $\uparrow$ si denota che tutti gli insiemi del filtro sono "chiusi verso l'alto". Sono cioè insiemi aperti (intersezioni) chiusi da altri insiemi aperti (intersezioni), sono cioè dei clopset.

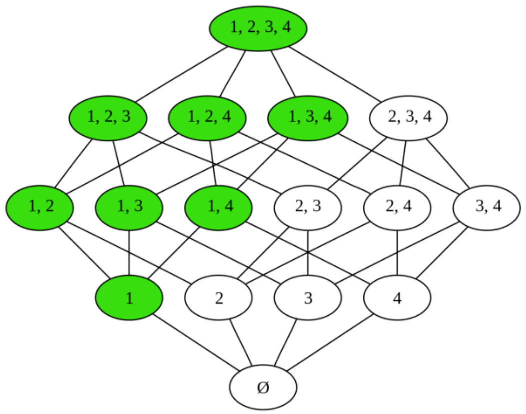


Figura 5. In verde, filtro massimale dell'insieme potenza di un insieme di 4 elementi ordinato per inclusione (= diagramma di Hasse. Cfr. Figura 2).

- Tornando al nostro ultrafiltro, più in generale, dato un insieme S si può definire sull'insieme potenza di S $\mathcal{P}(S)$ un ordinamento parziale per inclusione $\subseteq$ che ne fa un reticolo come in **Figura 3**, ovvero $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Si definisce **ultrafiltro** $\boldsymbol{U}$ il filtro

F **massimale** (ovvero quello di cui non se ne può definire uno più grande) non di un solo insieme, come gli insiemi colorati in verde in **Figura 5**) ma di un'intera famiglia di insiemi come appunto nel reticolo di **Figura 3**, tale che:

1. S è in F, e se A e B sono in F così la loro intersezione (= F è chiuso sotto intersezione finita);
2. L'insieme vuoto non è in F (= F è un filtro proprio);
3. Se A è in F e A è un sottoinsieme di B, allora anche B è in F per tutti i sottoinsiemi di S (F è chiuso verso l'alto $\uparrow$ (*upset*)).

- ♦ Infine, il filtro minimale che contiene un dato elemento p o **elemento principale** è detto **filtro principale** e consiste nell'insieme $\{x \text{ in } F \mid p \leq x\}$ ed è denotato usando come prefisso $\uparrow p$. Nell'esempio in **Figura 5**, l'elemento principale è $\uparrow\{1\}$.
- ♦ Il **duale** di un filtro è definito l'**ideale** I, più esattamente, in teoria degli insiemi, **l'ideale primo** che si ottiene semplicemente **invertendo tutte le relazioni** in F, ovvero $x \leq y$ con $x \geq y$, sostituendo intersezioni con unioni, e quindi $\wedge$ con $\vee$. Il che ci riporta alle leggi di De Morgan. In questo caso, l'elemento principale p

contenuto nell'**ideale principale** denotato come $\downarrow p = \{x \text{ in } I \mid x \leq p\}$**,** nel nostro caso in **Figura 5** l'ideale principale sarà:$\downarrow\{1,2,3,4\}$.

- Un ideale è dunque costituito di inclusioni fra unioni di sottoinsiemi aperti, **chiusi verso il basso** (*I* è chiuso verso il basso ↓ (*downset*))**.** Di qui la definizione che uno spazio di Stone associabile ad un'algebra di Boole è sempre costituito di **clopset**.
- In altri termini, duale di un ultrafiltro è un **ideale massimale** che intuitivamente consisterà nel "leggere" (ordinare) dall'alto in basso l'ultrafiltro colorato in verde in **Figura 5**. In teoria degli insiemi, dunque, **un ideale è il duale di un filtro**, e un **ideale massimale** è il duale di un **ultrafiltro.**
- Ora, nel caso di un'algebra di Boole *B* nell'insieme *S* per ogni elemento *a* dell'insieme bisogna considerare anche il suo **complemento** $\neg a$.
- Di qui l'altra formulazione dell'enunciato del teorema di Stone, data l'algebra di Boole *B,* se i punti **nello spazio di Stone** *S*(*B*), sono gli **ultrafiltri** su *B,* allora equivalentemente essi sono gli **omomorfismi** da *B* ad un algebra di Boole a due elementi.

- Ovvero un'algebra di Boole il cui **soggiacente insieme numerabile** o **universo** su cui è definita (*carrier set*) è l'insieme a due elementi così che $B = \{1,0\}$, dove con **omomorfismo** s'intende, lo ripetiamo, una **mappatura o relazione fra oggetti che preserva la struttura** fra due strutture algebriche (Cfr. §8.3.1).
- Intuitivamente, il filtro massimale del reticolo di **Figura 5,** nella misura in cui è definito su uno spazio di Stone, è omomorfo al reticolo di **Figura 3** che rappresenta tutte le operazioni logiche soddisfacibili da un'algebra di Boole a due elementi. Per rendersene conto, basta ricordare che l'ideale principale – corrispondente al **supremo** del reticolo booleano associato a $S(B)$, ovvero $\downarrow\{p\}$ – sarà la disgiunzione sempre vera ($0\vee1$), mentre il filtro principale – corrispondente all'**infimo** del suddetto reticolo $\uparrow\{p\}$ – sarà la congiunzione sempre falsa ($0\wedge1$).
- Per concludere la nostra disanima intuitiva del teorema di Stone, soffermiamoci ancora sulle proprietà dello spazio di Stone $S(B)$ in quanto particolare "spazio topologico". Propriamente esso si definisce come uno spazio:

1. **Compatto** (non nel senso di uno spazio geometrico costituito di “chiusi” e “limitati”, ma nel senso topologico perché ciascuna delle sue coperture (insiemi) “aperte” ha una “sotto-copertura” (sottoinsiemi) finita);
2. **Totalmente disconnesso** (in uno spazio topologico solo gli insiemi a un solo punto (l’insieme unitario e l’insieme vuoto) sono connessi));
3. **Di Hausdorff** (i suoi punti hanno intorni disgiunti).

♦ Quello che è notevole è che le topologie degli spazi di Stone in matematica e computer science e quelle delle C*-algebre (sotto-algebre degli spazi di Hilbert) in fisica quantistica **sono le stesse** → fondamento della **computazione quantistica.**

♦ Infine, il teorema di Stone afferma la **dualità categoriale fra la categoria degli spazi di Stone e la categoria delle algebre di Boole.** Infatti, data un’algebra di Boole B e un’algebra di Boole A, ad esse sono associati gli spazi di Stone $S(B)$ e $S(A)$. La dualità fra queste due categorie di strutture è data dal fatto che, data una **funzione continua** da $S(B)$ a $S(A)$, ad essa corrisponde una **funzione monotona** (ricorsiva, **crescente** ($\uparrow x$) o **induttiva** $x_{n+1} = f(x_n)$ nel caso di algebre di Boole,

decrescente ($\downarrow x$) o **coinduttiva** $x_{n-1} = f(x_n)$ nel caso di coalgebre di Boole) in senso inverso da A a B.

- In ogni caso il teorema di Stone è definito su **insiemi standard** e quindi la sua prova richiede **l'assioma di scelta** almeno in una sua forma più debole. Ovvero, il cosiddetto **teorema dell'ideale primo booleano**, un principio di scelta indebolito che afferma che ogni algebra di Boole ha un ideale primo.
- Questa osservazione apre la strada alla dimostrazione dell'esistenza di una dualità in termini di teoria delle categorie fra un **algebra di Boole** e la sua **coalgebra su spazi di Stone** (in questo caso, la **dualità funtoriale** non è fra una ricorsiva e una continua come nel teorema di Stone, ma fra **due ricorsive,** una induttiva e una coinduttiva) che, in quanto definiti su **insiemi non-standard di Aczel** (che non sono totalmente ordinati, ma solo parzialmente ordinati), consente di definire omomorfismi funtoriali e quindi **verità locali**, per mapping dalla struttura della coalgebra sulla relativa algebra di Boole.
- Questo significa un drammatico arricchimento della semantica delle algebre di Boole, dalla logica matematica alla logica modale e dunque anche filosofica.

- Tutto questo ci porta a comprendere **la necessità dell'uso della TC** per affrontare le tematiche più avanzate sia in fisica quantistica che in teoria della computabilità effettiva (*computer science*), al loro più alto livello teoretico, ovvero in quanto ambedue definite su spazi topologici, con ricadute immediate sul campo applicativo.

8. ALCUNI ELEMENTI DI TEORIA DELLE CATEGORIE (TC) (Abramsky & Tzevelekos, 2011)

8.1. Alcune nozioni fondamentali della TC

Punto fondamentale della TC è che le categorie in TC sono **strutture algebriche** che soddisfano **un'universalità (unicità) algebrica** (Algebra Universale) e non **categorie logiche** (logica dei predicati) che soddisfano **un'universalità (unicità) logica** (Logica Universale). La relazione assiomatica fra le categorie e le altre strutture più studiate dell'Algebra Universale (quelle simili ai gruppi) può essere definita nei termini degli assiomi che soddisfano nella seguente Tavola:

Assiomi delle Principali Strutture Algebriche (simili ai Gruppi)					
	Chiusura $\exists(Max(A))$	Associatività $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$	Identità $A=A$	Invertibilità $(A\to B)=(A\leftarrow B)$	Commutatività $(A\times B)=(B\times A)$
Semigruppoide	Non-necessario	Necessario	Non-necessario	Non-necessario	Non-necessario
Categoria	Non-necessario	Necessario	Necessario	Non-necessario	Non-necessario
Gruppoide	Non-necessario	Necessario	Necessario	Necessario	Non-necessario
Magma	Necessario	Non-necessario	Non-necessario	Non-necessario	Non-necessario
Quasi-Gruppo	Necessario	Non-necessario	Non-necessario	Necessario	Non-necessario
Loop	Necessario	Non-necessario	Necessario	Necessario	Non-necessario
Semigruppo	Necessario	Necessario	Non-necessario	Non-necessario	Non-necessario
Semigruppo Inverso	Necessario	Necessario	Non-necessario	Necessario	Non-necessario
Monoide	Necessario	Necessario	Necessario	Non-necessario	Non-necessario
Gruppo	Necessario	Necessario	Necessario	Necessario	Non-necessario
Gruppo Abeliano	Necessario	Necessario	Necessario	Necessario	Necessario

Tabella 1

8.1.1. I primitivi della TC

- Il punto di partenza è che in TC gli "elementi" nel senso insiemistico del termine (cfr. 8.1.2) **non sono dei primitivi**. In TC essi sono comunque interpretati ***sempre*** **come domini-codomini di "frecce" o "morfismi"** – p.es., "funzioni" nel caso di insiemi, "operatori" nel caso di spazi, "mappe", etc.
- In altri termini, la TC è un **linguaggio universale assiomatico** per le scienze matematiche e logiche in qualche modo più generale di quello costituito dalla teoria degli insiemi mediante cui si possono individuare e dimostrare **relazioni strutturali** fra teorie (es., scientifiche e filosofiche) appartenenti a **categorie logiche diverse** (p.es., **proprietà naturali e predicati logici)** non dimostrabili altrimenti, come nel caso del nostro **bicondizionale ontologico**.
- I **primitivi** della TC sono infatti: 1) **morfismi o frecce** f, g; 2) **composizioni** di morfisimi $f \circ g$; 3) due **mappe** *dom* $(\bullet)$, *cod* $(\bullet)$ che assegnano domini e codomini rispettivamente ad ogni freccia o morfismo.
- A questi primitivi, si aggiungono i **due assiomi di identità e associatività** che caratterizzano le categorie rispetto alle altre costruzioni algebriche simili ai gruppi dell'Algebra Universale (Cfr. **Tabella 1**).

♦ In tal modo una **categoria** è “qualsiasi struttura in logica o matematica con morfismi che preservano la struttura”.

♦ Ogni **categoria** è dunque costituita da:

- Una collezione di **oggetti** (morfismi riflessivi), *A, B, C, …*;
- Una collezione di **frecce**” o **morfismi**, *f,g,h,…*;
- Due collezioni di **mappe dom, cod** che assegnano a ciascuna freccia il suo “dominio” (punto di partenza) e il suo “codominio” (punto di arrivo) di oggetti;
- Per ogni tripla di oggetti, *A,B,C,* una **mappa di composizione** $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, scritta come $g \circ f$ (o talvolta: f ; g), dove B è codominio di f e dominio di g;
- Per ogni oggetto A, esiste un **morfismo riflessivo** che ha lo stesso oggetto come dominio e codominio, $A \to A$, e dunque costituisce una **relazione di identità/unicità**, Id_A, $\mathbb{1}_A$

♦ Perciò, sono altrettante categorie alcune fondamentali strutture logiche e matematiche (denotate col termine inglese), ciascuna definita in base **agli oggetti e ai morfismi che le caratterizzano**: **Set** (insiemi e funzioni); **Grp** (gruppi e omomorfismi); **Top** (spazi topologici e funzioni continue); **Pos** (insiemi parzialmente ordinati (*partially* *ordered sets*) e funzioni monotone (=sempre crescenti o sempre decrescenti)); **Vect** (spazi vettoriali definiti su campi numerici e funzioni lineari); etc.

- Come sappiamo, la categoria dei **Pos** è fondamentale in logica e in logica Booleana in particolare. Infatti, l'ordinamento parziale è una struttura di relazioni di ordinamento, $\leq$, fra insiemi che soddisfano simultaneamente:
  - $x \leq x$ (Riflessività)
  - $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$ (Antisimmetria)
  - $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (Transitività)
- La struttura dello "ordinamento totale di insiemi", e la relativa categoria **Tos** di insiemi totalmente ordinati, soddisfa Antisimmetria e Transitività, ma invece della Riflessività soddisfa la relazione di Totalità degli ordinamenti:
  - $x \leq y \vee y \leq x$ (Totalità)
- Cioè la relazione di ordinamento deve essere soddisfatta fra **tutti** gli insiemi della teoria (p.es., nella teoria degli insiemi standard o "ben fondati" ZF). Nondimeno, la categoria **Tos** manca di un oggetto rispetto a **Pos** perché la relazione di ordinamento $\leq$ che **Tos** usa non è più un oggetto in essa perché non soddisfa alla riflessività come

in **Pos**. Pertanto, **Tos** è una sottocategoria di **Pos.** Infatti, poset fondamentali sono l'insieme dei reali ($\mathbb{R}$,≤), oppure l'insieme potenza $\mathcal{P}$ di un dato insieme X ($\mathcal{P}$ (X),⊆).

- Una notazione importante è che per giustificare **l'ordinamento totale** degli insiemi ho bisogno di una semantica del **secondo ordine** (p.es., in ZF) per giustificare ordinamenti parziali ci bastano semantiche del **primo ordine** (p.es., nella teoria degli insiemi di Aczel. Cfr. §8.3.1)**.**

8.1.2. L'assioma insiemistico di elementarità e la teoria dei tipi di Russell

- Abramsky definisce una sorta di "cambio di paradigma" in logica e matematica la TC definendolo un **modo di pensare relazionale** (*arrow-theoretic way of thinking*) rispetto al **modo di pensare insiemistico** (*set-theoretic way of thinking*).
- Con una visione più storica della questione potremmo definire l'opposizione come quella, rispettivamente, fra un **modo di pensare aristotelico** verso un **modo di pensare platonico.**
- Da un punto di vista strettamente logico e non filosofico, il "platonismo" della teoria degli insiemi si manifesta nel fatto che essa presuppone **una logica dei predicati**,

come vedremo subito. C'è infatti un senso estrinseco a questa affermazione consistente nel fatto del cosiddetto **paradosso di Skolem,** ovvero che sebbene gli assiomi della teoria degli insiemi, p.es., ZF, siano enunciati del primo ordine, tuttavia la semantica di ZF suppone una logica del secondo ordine.

- ♦ Ma c'è un senso più profondo intrinseco per cui la teoria degli insiemi suppone una logica dei predicati e che è stato magistralmente espresso nel **principio di elementarità (= "essere elemento di") insiemistica** (*set-elementhood*) di Russell, enunciato nei *Principia*. Giustamente Quine lo evidenzia nella sua famosa raccolta di saggi sulla logica matematica, *From a logical point of view* (Quine, 1980) e lo discute all'inizio del suo magistrale manuale di logica matematica (Quine, 1983) perché è il nucleo fondante di ogni formalizzazione insiemistica della logica e della matematica.
- ♦ D'altra parte, questo evidenzia anche come l'**ontologia formale** non è semplice logica formale (insiemistica) perché si interroga sul fondamento della nozione di predicazione in quanto non riducibile all'appartenenza insiemistica (*set-elementhood*).
- ♦ Come Quine evidenzia, la fondamentale **classe universale** *V* cui la nozione di **verità** si riduce in ogni approccio **vero-funzionale** insiemistico alla semantica in logica matematica può essere così caratterizzata.

> “V sta per: ‘$\hat{x} = (x = x)$’. V è per definizione la classe di tutti quegli elementi che sono auto-identici (…), V perciò è semplicemente la classe di tutti gli elementi” (Quine, 1980, p. 144).

- Il cuore della ricostruzione di Quine della dimostrazione di Russell per mezzo della quale si passa dalla **semplice** identità ($x = x$) alla **doppia** identità o auto-identità $\hat{x} = (x = x)$ è legata alla nozione di **elementarità** (*elementhood*) introdotta da Russell nei *Principia,* per mezzo della quale si formalizza in logica formale la predicazione **nominale**, come quando nel linguaggio ordinario passiamo dal predicato “essere uomo” (φx) alla predicazione nominale “essere *un* uomo”, cioè si passa dalla funzione aggettivale della predicazione (“essere uomo” sta per “essere umano”, p.es. “x è uomo” sta per “x è *umano*”) alla trasformazione dell’aggettivo in pronome (“x è *un* uomo” sta per “x è *uno* degli umani”) cioè: $\varphi x \rightarrow \hat{x}(\varphi x)$.
- Questo significa che ogni oggetto per esistere in questa logica (ontologia) dev’essere nominalizzazione $\hat{x}$ di un qualche argomento di un predicato φx come in Platone ogni ente fisico per esistere deve “partecipare” dell’unicità dell’idea.

- Ecco perché in ogni approccio insiemistico ai fondamenti della logica, oltre alla semplice identità fra oggetti ($x = x$), dobbiamo sempre soddisfare primariamente la definizione di **identità/unicità di classe/insieme:** $\langle \zeta = \eta \rangle$ per $\langle \forall\alpha\big((\alpha \in \zeta) \leftrightarrow (\alpha \in \eta)\big)\rangle$. Dove α è il simbolo nel meta-linguaggio di qualsiasi variabile x nel linguaggio-oggetto, e $\langle \zeta, \eta \rangle$ sono meta-simboli di classi.
- Allora la notazione $\langle \alpha \in \zeta \rangle$ di appartenenza di classe o "essere elemento di una classe" è o un primitivo, oppure è giustificato mediante la seguente definizione di una classe intesa come estensione di un dato predicato φ: $\langle \beta \in \hat{\alpha}\varphi \rangle$ per $\langle \exists\gamma \Big((\beta \in \gamma) \land \forall\alpha\big((\alpha \in \gamma) \to \varphi\big)\Big)\rangle$ – che l'assiomatizzazione del "principio di comprensione" fregeano – dove la notazione $\langle \hat{\alpha}\varphi \rangle$ sta per la **nominalizzazione** del predicato φ, come "umanità" sta per la nominalizzazione di "essere uomo" – quella che in Platone sarebbe l'*ousìa* umana, l'idea-uomo.
- In tal modo, la formula $\langle \beta \in \hat{\alpha}\varphi \rangle$ sta per "essere un membro dell'umanità" e la nominalizzazione del predicato a sua volta fa sì che ogni classe in quanto nominalizzata – ovvero **ridotta *ad unum*,** così da soddisfare l'**unicità** propria della definizione intuitiva di **universale logico** – può essere a sua volta elemento di (appartenere a)

un’altra classe e allo stesso tempo si dimostra come “esistenza” in logica coincida con “appartenenza di classe”, per qualsiasi oggetto, individuo o classe che sia. Per questo, anche la classe nominalizzata soddisfa l’assioma di auto-identità $\hat{x} = (x = x)$ e quindi può appartenere a *V*, che allora diventa la classe di tutto ciò che (logicamente) esiste in una teoria insiemistica (per questa ricostruzione, cfr. (Quine, 1983, p. 133-136)).

- Allo stesso tempo questa appartenenza a *V* sotto la condizione di “elementarità” soddisfa formalmente l’assioma platonico che ogni oggetto esiste (sia in logica che metafisica) in quanto soddisfa la **relazione di auto-identità** come Platone afferma nel suo dialogo “metafisico” per eccellenza, il *Parmenide*. Tutto ciò esplicita, a mio giudizio, l’ontologia platonica (o **logicista**) della matematica moderna in quanto basata su un’insiemistica fondata sulla logica dei predicati.
- Viceversa, si comprende la rilevanza del fatto che nella TC gli elementi non sono dei primitivi, ovvero la rilevanza della non-elementarità predicativa dei suoi oggetti – per esistere un oggetto in TC deve soddisfare l’identità, non l’auto-identità.
- Di qui due fondamentali conseguenze per l’ontologia basata su una logica insiemistica:

1. Per evitare fatali equivoci, bisogna ricordare che “essere elemento” in teoria delle classi **non si identifica con “essere un individuo”.** P.es., ciò che nel linguaggio ordinario si denota come referente di un nome proprio, “Socrate” o come referente di una definizione ostensiva: “questo oggetto”. “Individuo” infatti sta per “essere membro di una **classe unaria”** o a un solo elemento, o, al limite, sta per una classe che si **auto-appartiene:** $\langle \zeta \in \zeta \rangle$ (Quine, 1983, p. 135)**.** In altri termini, a V appartengono solo **elementi, non individui** perché i primi soddisfano l’auto-identità e gli stessi individui esistono solo in quanto soddisfano l’assioma di elementarità, perché sono elementi a loro volta. Fra l’altro dimostrando come solo così la “partecipazione” platonica diventa una teoria consistente (per esempio rispondendo alla critica di Aristotele), anche se il prezzo da pagare ontologico e metafisico diventa molto alto.
2. Infine, la costruzione russelliana evidenzia come – per evitare antinomie come quelle della teoria degli insiemi di Cantor o quella della teoria delle classi di Frege scoperta da Russell stesso – sia essenziale una formalizzazione insiemistica della teoria dei **gradi semantici.** Ovvero che in generale l’argomento di un predicato

(l'elemento di una classe) sia di un grado semantico **inferiore** a quello del predicato (della classe cui appartiene). Russell per questo propose negli stessi *Principia* la sua **teoria dei tipi logici**, giustificandola col cosiddetto **assioma di riducibilità**. Purtroppo, l'assioma di riducibilità è incompatible con i teoremi di incompletezza di Gödel, lasciando così un *vulnus* incolmabile nella teoria russelliana degli insiemi.

3. In ogni caso, la costruzione russelliana evidenzia **un essenziale platonismo** di chiunque usi la teoria (standard) degli insiemi per i fondamenti della matematica (Fraenkel, 1953; Fraenkel, Bar-Hillel, & Levy, 1973) e, allo stesso tempo, la necessità di riferirsi alla TC per chiunque voglia giustificare una logica e una matematica **ante-predicativa,** non fondata sulla logica dei predicati.

8.1.3. Differenza fra matematica/logica insiemistica e matematica/logica categoriale

- ♦ Abbiamo visto in che senso – molto profondo – la teoria degli insiemi suppone una logica dei predicati. La TC, invece, si pone come abbiamo visto a un **livello ante-**

predicativo ponendo, come aveva intuito Peirce, **l'algebra delle relazioni** a fondamento della stessa nozione di insieme e quindi di **predicato** in logica e di **funzione** in matematica.

- ♦ In ogni caso, guai a banalizzare la TC con questioni filosofico-ideologiche che non servono a nessuno. Per molti illustri studiosi che la usano e la applicano, la TC è semplicemente un utile metalinguaggio (p.es., (Landsman, 2017)) che non inficia il fondamentale platonismo ontologico della logica e della matematica.
- ♦ Infatti, secondo questa interpretazione – che non mi sento di giudicare quanto fondata – la TC può essere giustificata all'interno di una **teoria dei fondamenti insiemistica** della logica e della matematica, anche se basata sulla **teoria assiomatica degli insiemi di Von Neumann- Bernays - Gödel (NBG)** e non quella di **Zermelo-Fraenkel (ZF).**
- ♦ Effettivamente, per parlare di "cambio di paradigma" in logica e matematica usando la TC occorrerà aspettare che vengano sviluppati progetti di ricerca internazionali come quello della cosiddetta **"Teoria omotopica dei tipi"** sui fondamenti della matematica basato sul potente **assioma di univalenza** di Vladimir Voevodsky dell'*Institute for Advanced Studies* (IAS) dell'Università di Princeton – l'Istituto che fu, fra gli

altri di Einstein e di Gödel – e oggi portato avanti al medesimo Istituto (The Univalent Foundations Program, 2013).

- Tale programma fonda sia la logica che la matematica usando la TC **sull'algebra degli operatori e sulla teoria degli spazi topologici (= topologia algebrica)** che come abbiamo visto è il formalismo algebrico comune sia alla fisica teorica che alla logica (cfr. §7.4).
- L'**omotopia** è infatti una proprietà fondamentale in topologia perché con essa si intende la proprietà di due funzioni (mappe) f e g continue da uno spazio topologico X ad un altro Y, cioè $f\colon (\mathrm{X} \rightsquigarrow_f Y)$ e $g\colon (X \rightsquigarrow_g Y)$ tale che l'una f può essere "deformata con continuità" nell'altra, ovvero f non è una semplice funzione →, ma un **percorso (*path*) topologico o processo** ⇝.
- Se questa deformazione omotopica è **invertibile** da g ad f, le due mappe sono definite come **equivalenze per omotopia** e i due spazi X e Y **equivalenti per omotopia:** $f\colon (\mathrm{X} \rightsquigarrow_f Y) \simeq g\colon (X \rightsquigarrow_g Y)$**.** Equivalenza che in teoria degli insiemi si avrebbe se le due mappe (funzioni/predicati) sono definite sui medesimi insiemi (classi) X e Y e sono invertibili. P.es., "tutti gli uomini sono animali razionali" e viceversa.

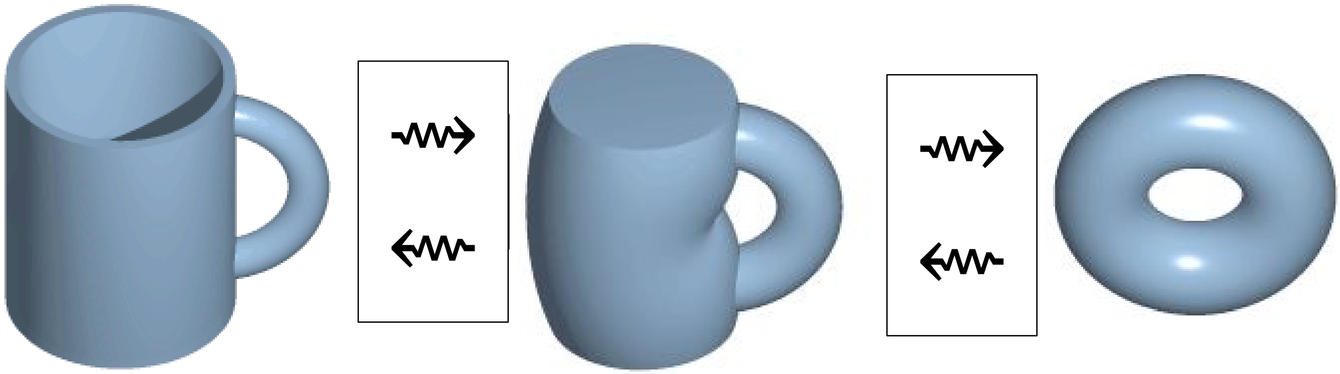


Figura 6. Un classico esempio di trasformazione omotopica invertibile

- Infine, se due spazi topologici *X* e *Y* sono equivalenti per omotopia, si dice che sono del **medesimo tipo di omotopia,** soddisfano cioè un qualche tipo di **identità** (*Id*)/**unicità** ($\mathbb{1}$), **gerarchizzata** fra tipi o **universi** omotopici $Id_{\mathcal{U}_n}$
- → **In TC** si definisce così la **categoria delle omotopie** $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ i cui oggetti sono gli spazi topologici e i cui morfismi sono mappe continue equivalenti per omotopia. Ovviamente, la categoria delle omotopie ha diverse **sotto-categorie** per tipi di omotopia, ovvero di (gradi) diversi di equivalenza per omotopia.

- Abbiamo appena visto in che senso la teoria degli insiemi è basata per Russell nei *Principia* sulla logica dei predicati (seguendo Frege) e, quindi, sulla nozione di **elemento preso come primitivo** per giustificare la nozione di **appartenenza insiemistica (e/o di classe)** $\in$ cui ridurre la nozione stessa di predicazione e quindi, in ontologia formale, lo "è" di ogni proposizione predicativa. Allo stesso tempo, abbiamo visto perché Russell stesso dovette definire la "teoria (insiemistica) dei tipi" per evitare l'antinomia da lui stesso scoperta nella teoria di Frege. Teoria che fu abbandonata perché l'**assioma di riducibilità** su cui si fondava è incompatibile con i teoremi di incompletezza di Gödel (cfr. §8.1.2).
- L'approccio **omotopico** invece che **insiemistico** alla teoria dei tipi non soffre di queste limitazioni e già questo potrebbe essere sufficiente a renderlo interessante.
- **L'assioma di univalenza** di Voevodsky completa il quadro perché afferma che, nella categoria $\mathcal{O}$, data un'identità nel senso della TC fra oggetti, A, B che appartengono al medesimo tipo omotopico, o universo di oggetti $\mathcal{U}_n$, cioè $Id_{\mathcal{U}_n}(A = B)$ questa identità è equivalente a un'equivalenza $(A \simeq B)$, ovvero:

$$Id_{\mathcal{U}_n}(A = B) \simeq (A \simeq B)$$

- Come molto spesso gli studiosi della HoTT affermano l'assioma di univalenza rende rigorosa in matematica la condizione **sotto la quale associare un'equivalenza a un isomorfismo**, condizione spesso – sottolineano – "troppo allegramente" data per scontata in matematica.
- Infatti, come si intuisce, abbiamo fondato una **classe di equivalenza X** $:= (A \simeq B)$, ovvero costituito algebricamente il **dominio di un predicato** $\boldsymbol{P_{\mathcal{U}_n}(x) = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}_n}(x) = 1_{\mathcal{U}_n}(x)}$ appartenente a un determinato tipo o universo di oggetti $\mathcal{U}_n$.
- D'altra parte, la differenza fra l'assioma di univalenza in topologia e l'assioma di equivalenza (estensionalità) in teoria delle classi $(\mathbf{X} \leftrightarrow \mathbf{Y}) \Rightarrow (\mathbf{X} = \mathbf{Y})$ è che, mentre in questo secondo caso abbiamo **"impoverito" la nozione di identità** riducendola a quella di equivalenza, con l'univalenza abbiamo **"arricchito" la nozione di equivalenza** grazie alla ricchezza della nozione topologica di identità, visto che in essa si può arrivare ad affermare identità e quindi equivalenze fra oggetti appartenenti a diversi spazi *X, Y* (p.es., a diversi contesti o "mondi possibili") seguendo diversi "percorsi" omotopicamente equivalenti: $(X \rightsquigarrow_f Y) \simeq (X \rightsquigarrow_g Y)$ (cfr. **Figura 6**).
- P.es., Aristotele diceva nel suo trattato di cosmologia *De caelo et de mundo* che i corpi celesti non sono assimilabili a dei viventi perché nei loro moti seguono "orbite

circolari", ovvero tornano allo stesso punto seguendo sempre lo stesso percorso. Diversamente da un vivente (p.es., un animale) che è capace di arrivare alla stessa méta seguendo percorsi diversi, "percorsi omotopici".

- Indicata così, anche filosoficamente, la rilevanza della TC non appena la si consideri come metalinguaggio dell'algebra, della matematica e quindi della logica **topologiche**, continuiamo nella discussione di altre nozioni fondamentali della TC.

8.1.4. Omomorfismi e funtori in TC

- Come più volte detto, una nozione fondamentale in algebra e TC è quella di **omomorfismo** ovvero di una mappa ($\longmapsto$) che mantiene la struttura. Se l'omomorfismo è **invertibile,** allora è un **isomorfismo**. In questo caso si dice che l'omomorfismo soddisfa una **trasformazione naturale** (cfr. **Definizione 9.**), che è un particolare **diagramma commutativo** per tutti i morfismi e relativi oggetti della struttura.
- Gli omomorfismi non vanno perciò confusi con gli **omeomorfismi** che sono isomorfismi fra spazi topologici.

- I morfismi tra categorie si definiscono col nome di **funtori,** *F,* ovvero operazioni che mappano oggetti e frecce da una categoria **C** all'altra **D,** *F:* **C** → **D,** in modo **da preservare composizioni e identità (oggetti)**.
- In tal modo fra le due categorie esiste un **omomorfismo o identità di struttura**, corrispondente.
- P.es., nel caso di insiemi, una relazione **biiettiva** "uno-a-uno" è sia iniettiva che suriettiva (dalla loro composizione), fra oggetti e morfismi che arriva fino **all'isomorfismo (*homomorphism up to isomorphism*),** cioè fino alla **biunivocità** delle biiezioni **nelle due direzioni** fra **tutti** gli elementi dei due insiemi, naturalmente **se l'omomorfismo è invertibile**.
- Generalmente, un funtore *F* è **covariante**, ovvero mantiene il verso delle frecce e l'ordine delle composizioni. Quindi:
  se $f : A \to B,$ allora $FA \to FB;$ se $f \circ g$, allora $F(f \circ g) = Ff \circ Fg;$

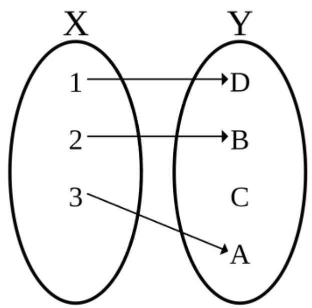
  e se $id_A,$ allora $Fid_A = id_{FA}.$
- Le due categorie, **C, D,** sono però ugualmente omomorfe fino all'isomorfismo se il funtore *G* che le connette è **controvariante** ovvero inverte il verso delle frecce e l'ordine delle composizioni, l'unico morfismo a rimanere invariato essendo quello

dell'identità che preserva gli oggetti, G: $\mathbf{C} \to \mathbf{D}^{\mathbf{op}}$. Quindi:

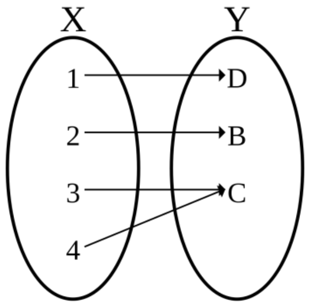
se $f: A \to B$, allora $GB \to GA$; se $f \circ g$, allora $G(g \circ f) = Gg \circ Gf$;

ma se id_A, allora $Gid_A = id_{GA}$.

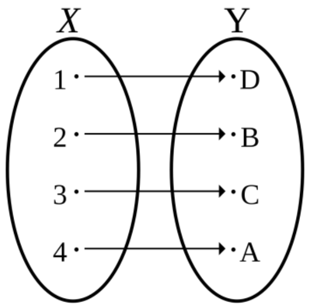
- ♦ → È così molto importante non confondere l'uso delle medesime nozioni/termini in teoria degli insiemi e in TC, anche se l'esemplificazione insiemistica di nozioni di TC può aiutare. Per esempio, morfismo in matematica insiemistica è sinonimo di **funzione** ovvero di "relazione che pone in corrispondenza (*mapping*) oggetti del dominio e del codominio". I principali morfismi in questo senso (= funzioni, f: $X \to$ Y) sono:
  1. **Iniettivi (uno-al-massimo-uno):** ovvero iniettivi senza essere suriettivi, se ogni elemento del codominio è relato al massimo con un elemento del dominio



2. **Suriettivi (uno-al-minimo-uno):** ovvero suriettivi senza essere iniettivi, se ogni elemento del codominio è relato almeno ad un elemento del dominio:



3. **Biiettivi (iniettiva e suriettiva):** se ogni elemento del codominio è relato esattamente a un elemento del dominio (= uno-a-uno senza essere biunivoca):



♦ Generalmente esiste una stretta relazione fra **biiettività e cardinalità degli insiemi:** due insiemi, fra i quali è possibile definire una relazione biiettiva fra i loro elementi, hanno **la medesima cardinalità** e se omomorfi saranno anche **isomorfi.**

- ♦ Un caso interessante è la composizione biiettiva $g \circ f$ fra due funzioni, iniettiva f: X → Y e suriettiva: g: Y → Z).

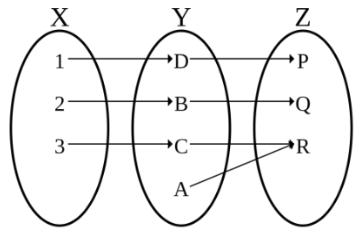


Figura 7. Relazione biiettiva (XZ) come composizione di una iniettiva (XY) e una suriettiva (YZ).

- ♦ La prima relazione XY non necessita di essere suriettiva e la seconda YZ non necessita di essere iniettiva, quindi gli insiemi considerati **non hanno la medesima cardinalità** (numero di elementi), sebbene il punto di partenza e di arrivo X e Z della relazione composta soddisfino una **relazione biiettiva** e quindi abbiano la medesima cardinalità.
- ♦ Nella **categoria degli insiemi,** le relazioni iniettiva, suriettiva, biiettiva, corrispondono a tipi diversi di **omomorfismo,** rispettivamente a **monomorfismo, epimorfismo e isomorfismo** fra oggetti e strutture della medesima categoria**.** In TC si vede

immediatamente come monomorfismi ed epimorfismi sono **duali**, perché legati a un "rispecchiamento" duale (inversione di morfismi e delle loro composizioni) delle strutture così che quando composti giustificano un **isomorfismo.**

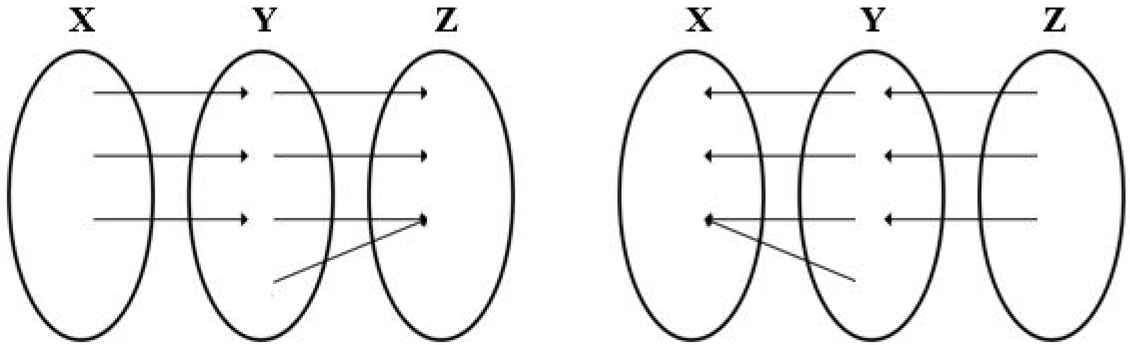


Figura 8. Dualità fra monomorfismo ($X \rightarrow Y$) ed epimorfismo ($X \leftarrow Y$), così da rendere **biunivoca in ambedue le direzioni** la relazione biiettiva XZ.

- Per completare il quadro degli omomorfismi bisogna aggiungerne altri due principali: l'**endomorfismo** fra una struttura algebrica e se stessa e l'**automorfismo,** ovvero, un endomorfismo che è anche un **isomorfismo.** Il seguente schema sintetizza le relazioni di inclusione/intersezione fra tutti questi **insiemi di relazioni omomorfe**:

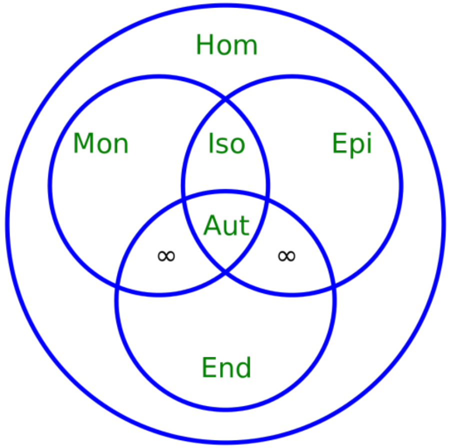


Figura 9. Schema delle relazioni fra tutti i possibili omomorfismi

- Particolarmente interessante per i nostri scopi sono le intersezioni **End∩Epi\Aut,** cioè endomorfismi che sono epimorfismi senza essere automorfi e quindi **isomorfi**, e correlativamente le intersezioni **End∩Mon\Aut** cioè endomorfismi che sono monomorfismi senza essere automorfismi e quindi isomorfismi, perché ambedue riguardano **strutture infinite, ∞,** le quali, ovviamente, non possono essere definite su **insiemi standard** in quanto presuppongono **inclusioni infinite** fra insiemi e/o **autoinclusioni infinite** fra insiemi (rispettivamente, suriettività **(Epi)** o iniettività (**Mono**) infinite fra insiemi). Suppongono cioè **insiemi non-standard**, nello specifico gli **insiemi non-benfondati,** come vedremo in §8.2.3.

8.1.5. Diagrammi commutativi e universalità

- Generalmente in matematica e in logica, **l'universalità** di un asserto α è associata a un **metodo universale di prova** della **verità** dell'asserto stesso, dato il quale, chiunque, ovunque e sempre applicando lo stesso metodo (ovvero partendo dai medesimi assiomi e applicando le medesime regole di inferenza), ottiene il medesimo risultato, cioè $\vdash \alpha$ (α è dimostrabile) ovvero $[\![\alpha]\!]$ (α è vero). **Verità, dimostrabilità, universalità** sono dunque strettamente connesse in logica.
- Nella logica estensionale della teoria degli insiemi, dove esiste uno stretto rapporto fra **appartenenza** $\in$ predicativa e **inclusione** nelle rispettive classi/insiemi (cfr. 8.1.2) la prova, e dunque l'universalità della verità di un asserto, consiste nel dimostrare che le due classi di oggetti, poste nella relazione di appartenenza nell'asserto predicativo vero, appartengono a un'unica classe che le include ambedue.
- Prendiamo il più antico metodo dimostrativo della logica occidentale, ovvero il **sillogismo deduttivo** nella sua forma elementare *In Barbara*. "Tutti gli uomini (B) sono

mortali (A), i Greci (C) sono uomini, quindi (è universalmente dimostrabile e dunque vero) che tutti gli uomini sono mortali".

- **Nell'interpretazione estensionale** (insiemistica) che per primo Leibniz, seguito da Eulero e quindi da Venn (con i suoi famosi diagrammi: cfr. **Figura 3**) hanno dato dello schema sillogistico aristotelico "AB & BC $\therefore$ AC" ciò corrisponde ad affermare predicativamente $((B \in A) \wedge (C \in B) \rightarrow (C \in A))$, ovvero usando l'usuale calcolo dei predicati come abbiamo imparato a fare a Logica II: $(\forall x\big((x \in B) \rightarrow (x \in A)\big) \wedge \forall x(x \in C) \rightarrow (x \in B)) \rightarrow \forall x(x \in C) \rightarrow (x \in A)$.
- Ambedue le formule predicative hanno la loro prova estensionale nelle inclusioni corrispondenti fra classi $((A \supseteq B) \wedge (B \supseteq C) \rightarrow (A \supseteq C))$, per semplice transitività dell'operatore insiemistico di inclusione: **(A ⊇ B ⊇ C) → (A ⊇ C).**
- In TC dove l'elementarità insiemistica non è un primitivo (cfr. 8.1.2), l'universalità assume la forma dell'**unicità** del corrispondente **diagramma commutativo** di morfismi. Il "modo di pensare relazionale" (*arrow-theoretic way of thinking*) assume così la forma di **un modo di ragionare diagrammatico** del calcolo algebrico delle relazioni. Esso è molto più astratto, ma molto più potente e come vedremo, anche molto più *ad mentem Aristotelis*, come Pierce per primo intuì.

♦ Per introdurre la nozione di diagramma commutativo (Abramsky & Tzevelekos, 2011, pp. 10-11), basta ricordare che **asserire universalmente la verità** delle due equazioni: $g \circ f = h$ e $g \circ f = k \circ h$ corrisponde in TC **all'asserire l'unicità** dei due corrispondenti diagrammi commutativi, **triadico e quadratico** rispettivamente:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "k"'] & D
\end{tikzcd}
$$

♦ Similmente, le due equazioni che asseriscono gli assiomi di **associatività:** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ **identità** $f \circ Id_A = f = Id_B \circ f$ corrispondono rispettivamente ai due seguenti diagrammi commutativi:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h \circ g"] & \\
& C \arrow[r, "h"'] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f"] & \\
& B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

♦ Di qui la **definizione di diagramma commutativo** in TC:

Definizione 1. (Diagramma commutativo)

Un diagramma commutativo in una categoria **C** *è un grafo orientato i cui nodi sono oggetti in* **C** *e i cui lati sono morfismi in* **C.** *Questo diagramma è commutativo se qualsiasi due percorsi con comune punto di partenza e di arrivo sono uguali, con almeno uno dei due percorsi con lunghezza maggiore di uno*.

- Nel caso del diagramma commutativo più fondamentale che guarda caso è quello triadico o triangolare di Peirce, i due percorsi uguali che condividono lo stesso punto di partenza e di arrivo cioè A e C sono, appunto, $g \circ f$ e h con il primo di lunghezza 2 (quindi > 1).
- Dalla nozione di diagramma commutativo, si evince immediatamente come la TC è il metalinguaggio proprio delle topologie e in particolare della nozione di **omotopia,** di cui già abbiamo notato in §8.1.3 la sua applicabilità all'ontologia del naturalismo aristotelico.
- Non sorprende perciò che il diagramma triangolare-basico fornisce una **dimostrazione universale** diretta, immediata e **non estensionale** dello schema-base aristotelico del sillogismo "AB & BC ∴ AC" (sia & che ∘ sono infatti congiunzioni).

♦ Basta interpretare i morfismi come **funtori** e gli oggetti *A,B,C* come **categorie** visto che nel sillogismo aristotelico denotano **generi naturali** (La Palme Reyes, MacNamara, & Reyes, 1994)**.** In tal modo la TC fornisce una fondazione alternativa a quella estensionale moderna del sillogismo aristotelico, della quale il grande logico polacco Jan Łukasiewicz (1878-1956) **dimostrò per primo l'insufficienza** per giustificare tutte le forme valide di sillogismo (Łukasiewicz, 1957), sviluppando a questo scopo una logica modale, usando una **logica a più valori,** che ha portato direttamente alla **logica fuzzy** oggi così usata sia in logica che in computer science (teoria dei controlli).

8.1.6. La centralità della dualità in TC e in semantica

♦ Discutendo del caso esemplificativo del sillogismo, ci saremo accorti immediatamente dell'inversione del verso del morfismo che caratterizza la relazione di appartenenza predicativa $A \overset{\in}{\rightarrow} B$ con quello che caratterizza il verso della sua verificazione estensionale per inclusione $A \overset{\subseteq}{\leftarrow} B$. Questo è un ottimo viatico intuitivo per comprendere la generalità della nozione di **dualità semantica** nella logica della TC, in quanto ricordiamo la TC comprende anche la categoria **Set** generalizzando la nozione insiemistica di **funzione** f a quella di omomorfismo fra strutture insiemistiche (*hom-set*). Ovvero, per ogni coppia di oggetti A, B nella categoria **C** si può definire l'insieme $\mathbf{C}(A,B) := \{f \in \mathbf{Ar}(\mathbf{C}) \mid f: A \to B\}$ dove **Ar**(**C**) denota la collezione delle frecce (*arrows,* morfismi) di **C.**

- Innanzitutto, attraverso la nozione di funtore controvariante, possiamo introdurre la nozione di **dualità di categorie**. Ovvero data una categoria **C** e l'endofuntore E: **C** $\to$ **C**, un funtore, cioè, che pone in relazione strutture e oggetti appartenenti alla medesima categoria, l'applicazione controvariante di questo funtore su tutti i morfismi e le composizioni legherà la categoria **C** alla sua opposta $\mathbf{C^{op}}$, cioè, E^{op}: $\mathbf{C} \to \mathbf{C^{op}}$. Ciò significa che esiste un **omomorfismo fino all'isomorfismo** fra **C** e $\mathbf{C^{op}}$ attraverso E. Ovvero, se applichiamo due volte il funtore controvariante E^{op}, ovvero $\mathbf{C} \to \mathbf{C^{op}}$ e $\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{C^{op}}$ otteniamo un **isomorfismo** e quindi **un'equivalenza duale** fra le categorie, in simboli: $\mathbf{C} \simeq \mathbf{C^{op}}$ ovvero, d'ora in poi, $\mathbf{C} \rightleftharpoons \mathbf{C^{op}}$.
- La dualità in TC è pertanto la corrispondenza fra le proprietà della categoria **C** e quelle della sua opposta. In logica, è evidente che si può così formalizzare nel modo più generale la teoria della verità come **corrispondenza** inclusa la teoria tommasiana

ontologica della **verità come *adaequatio*** nei due versi della relazione composizionale intelletto-cosa-intelletto, dove il primo "intelletto" è quello umano "misurato" per dalle cose (*adaequatio* logica-epsitemologica), il secondo è quello divino "misurante" le cose (*adaequatio* metafisico-ontologica) che illustreremo all'inizio della Parte IV.

- ♦ Più specificamente, nella semantica della TC la dualità come tale significa che dato un asserto α definito nella categoria **C,** scambiando dominio e codominio di ogni morfismo come pure l'ordine delle composizioni fra morfismi, si può ottenere un asserto duale al primo, α^{op}, nella categoria $\mathbf{C^{op}}$. Cioè α è vero *se e solo se* α^{op} è vero.
- ♦ In altri termini, la dualità come tale è l'asserto che **la verità/falsità è invariante** sotto queste operazioni di scambio sugli asserti, essi cioè sono **dualmente equivalenti.** In simboli: $\alpha \rightleftarrows \alpha^{op}$, come distinto dall'ordinaria equivalenza della tautologia logica: $\alpha \leftrightarrow \beta$ fra asserti della medesima categoria (o di categorie legate da funtori covarianti).
- ♦ A questo punto possiamo dare una fondazione in TC a quella dualità fra appartenenza $A \overset{\in}{\rightarrow} B$ e la sua verifica estensionale sull'inclusione di insiemi $A \overset{\subseteq}{\leftarrow} B$ che avevamo

introdotto intuitivamente sopra. È importante sottolineare che alla luce dell' **equivalenza duale** fra categorie opposte, nella semantica insiemistica della TC la categoria duale $\mathbf{Set^{op}}$ è più significativa della categoria **Set**, dato che un generico condizionale in logica "se…allora", p.es., "per tutti gli x se x è cavallo, allora è mammifero ($\supset$, ovvero i cavalli appartengono ai mammiferi)" è vero se e solo se "l'insieme dei cavalli è incluso ($\subset$) nell'insieme dei mammiferi".

- Infatti, in generale, la semantica di una data proposizione è definita insiemisticamente sull'insieme-potenza $\mathcal{P}(X)$: l'insieme di tutti i sotto-insiemi di un dato insieme X.
- Categorialmente, il funtore "insieme-potenza $\mathcal{P}$" è un endofuntore covariante **Set** $\rightarrow$ **Set,** che mappa ogni insieme X sul suo insieme-potenza $\mathcal{P}(X)$, e manda ogni funzione su X, $f: X \rightarrow Y$ alla mappa S che manda un sotto-insieme del dominio X: $U \subseteq X$ alla sua immagine che è sotto-insieme del codominio Y: $f(U) \subseteq Y$. Ovvero $S := (U \subseteq X) \mapsto (f(U) \subseteq Y) \mid (X, Y \in \mathcal{P}(\mathrm{X}))$. $\leftarrow$

- Viceversa, il funtore controvariante $\mathcal{P}^{op}$: $\mathbf{Set^{op}} \to \mathbf{Set}$ che mappa l'insieme potenza $\mathcal{P}(X)$ sul suo insieme X e manda ogni funzione $f: X \to Y$ alla mappa T che manda un sotto-insieme del codominio $V \subseteq Y$ alla sua immagine inversa sotto-insieme del dominio X: $f^{-1}(V) \subseteq X$, ovvero, $T := (V \subseteq Y) \mapsto (f^{-1}(V) \subseteq X)$, ovviamente preservando tutti gli oggetti, dato che i due insiemi-potenza, $\mathcal{P}^{op}(X)$ e $\mathcal{P}(X)$, sono equipotenti (hanno la medesima cardinalità) per definizione. Cioè: $\mathcal{P}^{op}(X) := \mathcal{P}(X)$. In una parola i due funtori "insieme-potenza" $\mathcal{P}$: $(X \to \mathcal{P}(X))$ e $\mathcal{P}^{op}$: $(\mathcal{P}^{op}(X) \to X)$, invertono solo i morfismi e le loro composizioni preservando tutti gli oggetti (sotto-insiemi) sui quali sono definiti.
- Praticamente, nel caso del funtore $\mathcal{P}^{op}$ è come se partendo dal codominio **si coinduce la(e) funzione(i) e i(l) relativo(i) domini(o)** che manda(no) a quel codominio.
- Ciò che è fondamentale rilevare è che l'equivalenza duale fra categorie non vale solo per l'applicazione controvariante di funtori che sono endofuntori definiti sulla medesima categoria $F: \mathbf{C} \to \mathbf{C^{op}}$, ma anche per l'applicazione controvariante di funtori definiti su due categorie distinte $G: \mathbf{C} \to \mathbf{D^{op}}$, p.es. algebre e coalgebre.

- Infine, ci saremo accorti che l'interpretazione algebrica degli insiemi e delle loro equivalenze in TC è alla base del fatto che, propriamente, l'algebra booleana con operatori significa che di per sé la verifica $[\![\alpha]\!]$ di formule α della logica proposizionale riscritte nella logica equazionale booleana non richiede di per sé operatori che agiscono su insiemi-sottoinsiemi, ma operatori che agiscono su **strutture algebre complesse** $\mathbb{S}^{+}$ ovvero, strutture algebra/sotto-algebre, ovvero **l'omomofismo** fra due strutture algebriche (p.es., fra un'algebra di Boole e una coalgebra definita su un spazio di Stone). Di qui il motto in logica della TC che **il significato è un omomorfismo** (Venema, 2007).
  - Inoltre, vi sono tutta una serie di **fondamentali costruzioni duali** che possono essere formalizzate nella TC e che non possiamo definire qui, ma che hanno tutte un significato immediato per noi, perché sia **il formalismo topologico della fisica quantistica**, che della **computazione quantistica** offrono diverse esemplificazioni del loro uso.
- Per esempio, partendo dall'equivalenza duale appena ricordata delle categorie delle algebre e coalgebre per l'applicazione controvariante di un medesimo funtore Ω:

Alg(Ω)$\rightleftharpoons$Coalg(Ω^{op}) e nozioni di universalità (unicità) e co-universalità, di prodotti e co-prodotti, di limiti e co-limiti interpretati rispettivamente come oggetti finali e iniziali di due categorie opposte poste in relazione da una terza categoria di funtori di indicizzazione, così da garantire il *mapping*, per mezzo di un funtore diagonale di tutti gli oggetti e i morfisimi di una categoria nell'altra, etc.

- Praticamente, **tutti gli oggetti e le operazioni** che sono utilmente formalizzati in **teoria degli insiemi**, e quindi nel calcolo e nella logica, e molti altri ancora (si pensi alla nozione di "tipo" logico (cfr. 8.1.3), **possono essere formalizzati in TC.**
- Esiste tuttavia **una fondamentale distinzione** fra la formalizzazione insiemistica e categoriale delle stesse nozioni.
- Invece di considerare **oggetti ed operazioni per ciò che "sono"** come in teoria degli insiemi, in TC **li consideriamo per ciò che essi "fanno"** (Abramsky & Tzevelekos, 2011, p. 53)**,** così da soddisfare formalmente – per i nostri scopi – la **primazia della prammatica sulla sintassi e la semantica** che l'interpretazione semiotica della logica di Moore ha mutuato dal suo maestro Peirce.
- Per concludere, possiamo dire che la TC **completa** ciò che manca all'approccio di Peirce **dandogli forma assiomatica**. È proprio questa mancanza che ha fatto sì che il

suo contributo alla storia del pensiero logico e matematico moderno rimanesse inutilizzabile e quindi per quasi un secolo sconosciuto o, perlomeno, meno riconosciuto di quelli di Frege, di Whitehead, di Russell che hanno fatto, invece, dell'assiomatizzazione la loro forza.

- Questo, sebbene logici del valore di un Lewis e di un Tarski abbiano riconosciuto da subito l'eccellenza di Peirce, già dall'inizio del secolo scorso.

8.2. Dalle algebre alle coalgebre in TC

8.2.1. La dualità algebra-coalgebra in TC

8.2.1.1. Algebre e coalgebre, prodotti e coprodotti

- Per introdurre la dualità **mediante un funtore Ω** applicato in maniera controvariante fra le categorie delle algebre **Alg(Ω)** e **Coalg(Ω^{op})** dobbiamo innanzitutto chiarire caratterizzare cosa s'intende con algebra e coalgebra e la dualità strutturale che le contraddistingue.

♦ In generale, un'algebra ha una struttura $A \times A \to A$, mentre una coalgebra ha una struttura $A \to A \times A$ dove i **prodotti** di una coalgebra per analogia si definiscono **co-prodotti,** ma sono profondamente distinti dai prodotti in quanto indicano essenzialmente delle **somme**. P.es., in teoria degli insiemi con "coprodotto" si intende **la somma disgiunta (*disjoint union*) *A*** di una famiglia di insiemi $(A_i: i \in I)$, cioè l'**unione insiemistica** $\cup$ (somma) di elementi appartenenti a insiemi distinti così da definire un nuovo insieme $\{A = \bigcup_{i \in I} A_i\}$. Siccome esiste una **funzione iniettiva** ("da uno al massimo a uno") che mappa esattamente ciascuno degli elementi di partenza in un sottoinsieme dell'insieme di arrivo, l'unione delle immagini (codomini) di questi morfismi iniettivi definisce una **partizione *A*** di sottoinsiemi nell'insieme di arrivo.

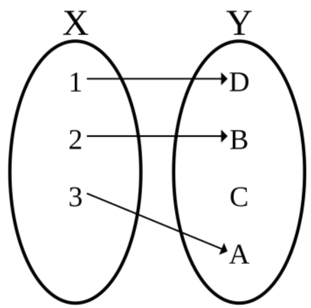


Figura 10. Esempio di somma disgiunta (coprodotto) di insiemi. Le mappe iniettive dall'insieme di partenza all'insieme di arrivo, definiscono una partizione A nell'insieme di arrivo, cioè l'unione di disgiunti $\bigcup(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$.

8.2.1.2. Un esempio banale, ma significativo sulla centralità dei coprodotti

- Per fare una banalizzazione quasi vergognosa di somma disgiunta che definisce una partizione, poniamo che l'insieme *Y* di **Figura 10** sia l'insieme di tutte le proprietà che definiscono i felini (*D*=avere i baffi, *B*=avere gli artigli, *C*=ruggire, *A*=miagolare). È chiaro che la nostra somma di disgiunti $\bigcup(D, B, A)$ come partizione di *Y* mi fornirà l'insieme delle proprietà che soddisfano il predicato "essere gatto", rispetto alla somma di disgiunti $\bigcup(D, C, A)$ che, come altra partizione di *Y*, mi fornirà l'insieme delle proprietà che soddisfano il predicato "essere tigre". Di qui il ruolo dei coprodotti nella teoria della costituzione algebrica dei predicati…
- Da qui si intuisce, da una parte, perché la struttura di una coalgebra è definita come $A \to A \times A$ nel senso che una struttura coalgebrica è una mappa iniettiva (monomorfismo) che manda i suoi oggetti "fuori" del loro "insieme di partenza" (*carrier-set*) (Rutten, 2000).

- D'altra parte, si intuisce il ruolo dei coprodotti delle coalgebre per costituire **domini di predicati** (= partizioni di insiemi, ovvero classi di oggetti definiti su insiemi) per una semantica coalgebrica di una logica (algebra) booleana come vedremo subito.
- Dualmente, se i coprodotti di una struttura coalgebrica sono essenzialmente somme con i loro morfismi caratterizzanti, i **prodotti** di un'algebra rappresentano essenzialmente un'operazione di **fattorizzazione.** In aritmetica, ogni numero n (p.es., 30) è il prodotto di x fattori in cui il numero n può essere decomposto [p.es., $x = 2$: (6×5), o (10×3), etc.; oppure per $x = 3$: $(10 \times 10 \times 10)$, o $(2 \times 3 \times 5)$, etc.] che moltiplicati insieme restituiscono n.
- In una struttura algebrica su insiemi, la tipica operazione di fattorizzazione è, per esempio, il **prodotto cartesiano fra insiemi,** ovvero la definizione di tutte le relazioni fra **coppie ordinate** $\boldsymbol{X \times Y := \{(x, y) | x \in X \wedge y \in Y\}}$ dei sottoinsiemi dell'insieme di partenza A su cui l'algebra è definita. La stretta relazione, allora, fra prodotto algebrico e fattorizzazione giustifica perché la struttura di una algebra è definita come $A \times A \rightarrow A$ nel senso che una struttura algebrica, dualmente a quella coalge-

brica, è una mappa suriettiva (epimorfismo) che (ri-)manda gli accoppiamenti (*pai-ring*) dei suoi oggetti "dentro" il suo "insieme di partenza" (*carrier-set*) (Rutten, 2000).

- Allo stesso tempo, il concetto di prodotto/coprodotto algebrico ci fa capire come il calcolo nelle sue origini newtoniane-leibniziane è basato sulla nozione di **polinomio algebrico** che altro non è che un'espressione che contiene costanti e variabili e che consiste in una somma o sottrazione di **monomi** (prodotti).
- Queste nozioni elementari ci aiuteranno a capire la definizione **funtoriale** della categoria delle algebre e delle coalgebre in TC, particolarmente utile a comprendere la loro essenziale dualità. Per questo un primo passo è la definizione di un **oggetto finale** in una categoria **C,** che può essere **iniziale** come duale a quella di oggetto **terminale** (Abramsky & Tzevelekos, 2011, pp. 18-19)**.**

8.2.1.3. Definizione funtoriale (categoriale) di algebre e coalgebre

Definizione 2. (Definizione di oggetti iniziale e terminale in una categoria)
Un oggetto I in una categoria **C** *è "iniziale" se per ogni oggetto A in* **C** *esiste un'unica freccia (morfismo) da I ad A, che scriveremo:* $\iota_A : I \to A$*. Un oggetto T in*

una categoria **C** *è "terminale" se per ogni oggetto A in* **C** *esiste un'unica freccia da A ad T, che scriveremo:* $\tau_A: A \to T$.

- Ovviamente queste due nozioni sono *duali,* ovvero se un oggetto è iniziale in **C** sarà terminale in $\mathbf{C^{op}}$**,** e viceversa.
- Non stiamo qui a dare la **definizione in TC** di prodotti e coprodotti da cui emerge chiaramente la loro **dualità,** ma che spiegheremo in seguito (Abramsky & Tzevelekos, 2011, pp. 19-24)**.** Introdurremmo così la loro **universalizzazione categoriale** in termini di **limiti e colimiti,** rispettivamente.
- I secondi in particolare perché, come amano affermare i logici e informatici, servono a "cucire insieme" – esattamente come i primi servono a "scomporre in parti": banalizzando al massimo, "olismo" vs. "riduzionismo" – oggetti di una categoria, così da fornire la **costruzione algebrica** per la fondazione (del dominio) di una **nuova proprietà/funzione** in fisica – nella misura in cui usiamo le coalgebre come tool matematico fondamentale, p.es., in QFT, "essere un magnete" – e quindi dualmente – usando le coalgebre definite su spazi topologici di Stone come semantiche di un algebra di Boole – di un **nuovo predicato in logica** che si riferisce a quella proprietà secondo i

dettami del nostro Realismo Naturalista. E il legame è non banale visto che le topologie di Stone sono **le medesime** delle topologie usate in QFT.

- Infine, dato lo stretto legame fra polinomi e algebre in particolare per il **Teorema Fondamentale dell'Algebra** per trovare le **radici** dei polinomi e sul quale si cimentarono i più grandi matematici moderni da Leibniz a Eulero a Gauss – anche se fu poi Girard a dargli la sua formulazione definitiva – è possibile definire un **funtore** Ω per la categoria delle algebre. Esso indicizza, in base al numero dei loro argomenti, in un'unica collezione le operazioni (polinomi) *f* che caratterizzano come una "firma" (*signature*) ciascuna algebra $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}$', …
- In tal modo, seguendo (Venema, 2007, p. 394-395), le operazioni (polinomi) caratterizzanti ciascuna algebra definita su un insieme *A* possono essere raccolte in un'unica **mappa indicizzata in Ω,** cioè α. In tal modo, ciascuna Ω-algebra nella categoria **Alg(Ω)** può essere definita nei termini della coppia $\mathbb{A} = \langle A, \alpha \rangle$, $\mathbb{A}' = \langle A', \alpha' \rangle$, …, dove *A, A',…* denotano gli oggetti (insiemi) su cui ciascuna algebra è definita, e $\alpha, \alpha',$ **...** le rispettive operazioni (funzioni polinomiali *f*) caratterizzanti (*signatures*).
- Analoga costruzione può essere fatta **dualmente** per la categoria delle coalgebre, **Coalg(Ω),** con la profonda differenza che le operazioni *f* indicizzate in Ω dalla mappa

α non sono in questo caso limitate a polinomi, ma estese a qualsiasi, mappa, funzione, percorso, processo,.. così da rendere le coalgebre molto più "duttili" per fini applicativi delle loro "sorelle" duali, le algebre.

- ♦ Possiamo quindi dare la definizione **funtoriale in TC** delle due categorie di algebre e coalgebre.

Definizione 3. (Categoria delle algebre per un endofuntore Ω: Alg(Ω))

Dato un endofuntore Ω *su una categoria-base* **C** *una* Ω*-algebra è una coppia* $\mathbb{A} = \langle A, \alpha \rangle$ *dove* $\alpha : \Omega A \to A$ *è una freccia in* **C**. *Un omomorfismo dall'*Ω*-algebra* $\mathbb{A}$ *all'*Ω*-algebra* $\mathbb{A}'$ *è una freccia* $f: A \to A'$ *tale che* $f \circ \alpha = \alpha' \circ \Omega f$, *così che il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & A' \\ \Omega A \arrow[u, "\alpha"] \arrow[r, "\Omega f"] & \Omega A' \arrow[u, "\alpha'"'] \end{tikzcd}$$

Definizione 4. (Categoria delle coalgebre per un endofuntore Ω: Coalg(Ω))

Dato un endofuntore Ω *su una categoria-base* **C** *una* Ω*-algebra è una coppia* $\mathbb{A} = \langle A, \alpha \rangle$ *dove* $\alpha: A \to \Omega A$ *è una freccia in* **C**. *Un omomorfismo dall'*Ω*-coalgebra* $\mathbb{A}$ *all'*Ω*-coalgebra* $\mathbb{A}'$ *è una freccia f:A → A' tale che* $f \circ \alpha = \alpha' \circ \Omega f$, *così che il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & A' \arrow[d, "\alpha'"'] \\ \Omega A \arrow[r, "\Omega f"] & \Omega A' \end{tikzcd}$$

- ♦ Da queste definizioni – in particolare dall'inversione della mappa α nelle due categorie e dalla conseguente inversione del "verso verticale" dei relativi diagrammi commutativi (=universalità della costruzione) – emerge l'evidente dualità delle due categorie che rende addirittura banale il fatto che ogni coalgebra in una data categoria **C** può essere letta come un'algebra nella categoria duale $\mathbf{C}^{\mathbf{op}}$ ovvero (Venema, 2007, p. 417):

$$\mathbf{Coalg}(\Omega) = (\mathbf{Alg}(\Omega^{\mathbf{op}}))^{\mathbf{op}}$$

- E la conseguente **equivalenza duale: Coalg(Ω)⇌Alg(Ω^{op}**) causa il loro **isomorfismo.**
- Per i nostri scopi logico-ontologici è molto più significativa l'equivalenza duale fra la categoria delle coalgebre definite su spazi di Stone **SCoalg** e quella delle algebre di Boole **BAlg: SCoalg(Ω)⇌BAlg(Ω^{op}**) (Moss, 1999; Kupke, Kurz, & Venema, 2004; Venema, 2007).
- Essa può essere estesa anche alla categoria delle **logiche modali booleane MBAlg** in particolare usando la cosiddetta "costruzione di Vietoris" e il conseguente funtore di Vietoris $\mathcal{V}$, **SCoalg($\mathcal{V}$)⇌BAlg($\mathcal{V}^{op}$**) che introducendo un **criterio di insiemi ammissibili** (= **restrizione** ⇀ dell'accessibilità → fra mondi possibili) per modellizzare in TC l'operatore modale di possibilità ◊, consente di estendere la semantica coalgebrica della logica booleana modale alla **semantica relazionale modale di Kripke** che abbiamo studiato in Logica II, facendo della coalgebra la semantica propria della logica di Kripke (Venema, 2007).
- Queste costruzioni modali, tuttavia, suppongono che gli insiemi chiusi-aperti (clopset) su cui la coalgebra della topologia di Stone è definita siano **insiemi non-**

benfondati di cui parleremo nella prossima sottosezione, che sono essenziali per l'ontologia formale del Realismo Naturale.

8.2.2. La dualità colimiti-limiti come universalizzazione categoriale della dualità coprodotti-prodotti in TC

- ♦ Per concludere, invece, concentriamoci sulla costruzione categoriale dei coprodotti (prodotti) algebrici di cui abbiamo accennato qualcosa all'inizio di questa sezione e della loro **universalizzazione** in termini di **colimiti (limiti)** in TC.
- ♦ I colimiti nelle coalgebre sono infatti la costruzione **universale** di coprodotti in una data categoria, in grado di modellizzare quella costruzione che consiste nel "mettere insieme" oggetti nel **dominio** di una nuova **funzione/proprietà** dotata di una universalità (diagrammatica) necessaria per poter dare dignità di **simbolo logico ben-formato** a questa costruzione medesima.
- ♦ Così, il "Gruppo Internazionale N-Lab" – nato per mostrare la validità della TC perché in grado di fornire un nuovo "punto di vita unificante di concetti altrimenti sparsi in matematica, fisica e filosofia" – definisce in maniera intuitiva la nozione di colimite:

(Un colimite) è ciò che definisce un oggetto "cucendo insieme" gli oggetti del diagramma, secondo le istruzioni date dai morfismi del diagramma medesimo (N-Lab Group, 2019)

- Effettivamente l'operazione "colimite" svolge in una rinnovata, formalizzata "Filosofia della Natura" (Ehresmann & Vanbremeersch, 2019) il ruolo che in quella Aristotelica svolgeva la nozione di "causa formale" come "principio di totalità" (*totalitas ante partes*) in grado, cioè, di costituire in quanto applicata su una qualche collezione di oggetti una "totalità di parti" (*totalitas ex partibus*). L'operazione di colimite in TC può intuitivamente definirsi perciò come:
  Sintesi di oggetti complessi da oggetti più elementari (...) che porta all'emergenza di oggetti e processi più complessi (Ehresmann & Vanbremeersch, 2019, p. 4)
- Questa costruzione ha così una rilevanza fondamentale in una modellizzazione coalgebrica della fisica fondamentale (quella della QFT termica come vedremo nella Sez. 9). Un dominio che poi faccia da **estensione** del relativo **predicato** nella logica di una ontologia realista che si riferisca a quella proprietà fisica.

♦ Per avvicinarci in maniera comprensibile per noi a questa nozione in TC partiamo dalla **definizione universale** in TC della nozione di **prodotto** che come sappiamo corrisponde, p.es., in aritmetica all'operazione di **fattorizzazione** e in algebra al **prodotto cartesiano** di insiemi: $A \times A \rightarrow A$. Quindi come già accennato, se i co-prodotti servono a "comporre insieme" oggetti più complessi dai più semplici, i prodotti servono a "scomporre in componenti" oggetti più complessi – banalizzando al massimo: "olismo" *vs.* "riduzionismo".

Definizione 5. (Definizione universale di prodotto in TC).

Siano A, B oggetti in una categoria **C**. *Un "prodotto" di A per B è un oggetto A × B (= coppia ordinata) con una coppia di morfismi proiettivi (suriezioni)* $A \overset{\pi_1}{\leftarrow} A \times B \overset{\pi_2}{\rightarrow} B$ *tali che per ogni tripla* $A \overset{f}{\leftarrow} C \overset{g}{\rightarrow} B$ *esiste un "unico" morfismo che definisce lo "accoppiamento (pairing) di f e g":* $\langle f, g\rangle : C \rightarrow A \times B$, *tale che il seguente diagramma commuta* (Abramsky, 2005, p. 20-21)*:*

$$\begin{tikzcd} A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\ & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dashed, "\langle f,g \rangle"'] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{pmatrix} \pi_1 \circ \langle f,g \rangle = f \\ \pi_2 \circ \langle f,g \rangle = g \end{pmatrix}$$

- ♦ Questa universalizzazione categoriale della nozione di **prodotto algebrico** ha tantissime applicazioni in diverse categorie (**Set, Pos, Top, Vect$_k$**, etc.) e quindi in altrettante branche della matematica. Per i nostri scopi logici, basta qui ricordare che nel caso di un insieme parzialmente ordinato su cui un reticolo di logica booleana definisce la sua semantica (**Figura 3**) i prodotti corrispondono ad altrettanti *massimi limiti inferiori* del reticolo.
- ♦ Da questa definizione universale in TC di **prodotto** si comprende facilmente quella di **coprodotto** tenuto conto che sono **duali**. Ciò che è un prodotto nella categoria **C** corrisponde a un coprodotto nella categoria opposta **C^{op}**.

Definizione 6. (Definizione universale di coprodotto in TC)

Siano A, B oggetti in una categoria **C.** *Un "coprodotto" di A e B è un oggetto $A + B$ insieme con una coppia di morfismi iniettivi* $A \overset{in_1}{\longrightarrow} A + B \overset{in_2}{\longleftarrow} B$ *tali che per* *ogni tripla* $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ *esiste un "unico morfismo" che definisce il "co-accoppiamento di f e g":* $[f, g]: A + B \rightarrow C$ *tale che il seguente diagramma commuta:*

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathsf{in}_1"] \arrow[dr, "f"'] & A+B \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"'] & B \arrow[l, "\mathsf{in}_2"'] \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{pmatrix} [f,g] \circ \mathsf{in}_1 = f \\ [f,g] \circ \mathsf{in}_2 = g \end{pmatrix}
$$

- ♦ Come nel caso dei prodotti, questa definizione categorialmente universale di coprodotto ha svariate applicazioni in altre categorie a partire da **Set** dove in tutte formalizza categorialmente la nozione di **somma disgiunta.** In particolare, in logica della TC, i coprodotti in un insieme parzialmente ordinato corrispondono al **massimo limite superiore.**
- ♦ Per passare da prodotti e coprodotti alla loro **generalizzazione categoriale** in termini di **limiti e colimiti** occorre fare alcuni passaggi intermedi, il cui scopo finale è estendere il diagramma commutativo triangolare fra morfismi con cui abbiamo dato una rappresentazione in TC di prodotti e coprodotti a morfismi che sono **funtori fra categorie,** grazie a una **categoria di funtori** mediante cui **indicizzare** i funtori delle precedenti categorie.

- ♦ Il primo passo consiste nel passare da una data categoria **C** alla **categoria dei morfismi** di **C, Ar(C),** i cui oggetti sono morfismi fra oggetti di **C** (sono dunque triple: (*a, b, f*) dove *a,b* sono oggetti e *f* il morfismo che li lega) e dove i morfismi sono morfismi di morfismi di **C**. È ovvio che per ogni **C** esiste la sua **Ar(C).**
- ♦ Il passo successivo è quello a una particolare categoria di morfismi, la cosiddetta **categoria-*comma* E: Ar(C, D),** i cui oggetti sono morfismi che appartengono a due categorie distinte **C, D** da cui il nome (*comma* significa "virgola").

Definizione 7. (Definizione di categoria-comma)

Siano **A, B, C** *tre categorie e F:* $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ *e G:* $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ *due funtori che hanno come bersaglio la medesima categoria* **C,** *ovvero* $\mathbf{A} \xrightarrow{F} \mathbf{C} \xleftarrow{G} \mathbf{B}$. *La "categoria-comma"* $(F \downarrow G)$ *ha oggetti che sono triple* (α, β, f) dove α *è un oggetto di* **A,** β *è un oggetto di* **B** *e* $f : F\alpha \rightarrow G\beta$ *è un morfismo in* **C** *che così è una categoria che risulta costituita da morfismi che pongono in relazione oggetti che appartengono a differenti categorie.*

- ♦ L'**universalità** di questa definizione si evince immediatamente quando si tenga presente che i morfismi fra due oggetti in **C** (α, β, f) e (α', β', f') sono coppie (*g,* *h*), dove *g*: $\alpha \rightarrow \alpha'$ *e h:* $\beta \rightarrow \beta'$ sono morfismi in **A** *e* **B** *rispettivamente tali che il seguente diagramma in* **C** *commuta, dove il verso verticale dei morfismi f, f' giustifica la connotazione della categoria-comma in questione come* ($F \downarrow G$)*:*

$$\begin{tikzcd} F\alpha \arrow[r, "Fg"] \arrow[d, "f"'] & F\alpha' \arrow[d, "f'"] \\ G\beta \arrow[r, "Gh"'] & G\beta' \end{tikzcd} .$$

♦ Ciò è confermato dal fatto che **il morfismo di identità** per ogni oggetto (α, β, f) in **C** è (1_α , 1_β) che **esiste** perché 1_α e 1_β esistono rispettivamente in **A** e in **B.** In tal modo *g* si può comporre con $g': \alpha' \rightarrow \alpha''$ *e h* con $h': \beta' \rightarrow \beta''$, e così via, di modo che il precedente grafico commutativo si può allungare quanto si vuole:

$$\begin{tikzcd} F\alpha \arrow[r, "Fg"] \arrow[d, "f"'] & F\alpha' \arrow[r, "Fg'"] \arrow[d, "f'"] & F\alpha'' \arrow[d, "f''"] \\ G\beta \arrow[r, "Gh"'] & G\beta' \arrow[r, "Gh'"'] & G\beta'' \end{tikzcd}$$

- Il passo ulteriore che ci avvicina definitivamente al nostro traguardo, è quello di definire una categoria di funtori mediante cui **indicizzare** funtori che pongono in relazione due altre categorie di funtori. In una parola, definire una categoria-comma dove uno dei due funtori che essa pone in relazione ha come origine una categoria **con un solo oggetto** $(*)$ e il suo relativo morfismo che sarà il **morfismo di identità** 1_*. Un siffatto funtore semplicemente mapperà su **un solo oggetto di C**, cioè su *c,* e quindi possiamo definire questo funtore *c* a sua volta. La categoria comma **C** avrà dunque questa struttura $(*) \xrightarrow{c} \mathbf{C} \xleftarrow{F} \mathbf{B}$**.**
- Di qui la definizione fondamentale di **morfismo universale** come oggetto **ini-ziale** o dualmente **finale (cfr. Definizione 2.)** in una categoria-comma a un solo oggetto $(*) \xrightarrow{c} \mathbf{C} \xleftarrow{F} \mathbf{B}$**.** Dal punto di vista della logica della TC esso corrisponderà alla **costituzione algebrica** di un **universale logico** nel suo nucleo relazionale. Perché, però, corrisponda a un **universale predicativo** o "predicato" occorre che questa costruzione sia relativa alla "cucitura insieme" di una collezione di oggetti in un **dominio** di questo morfismo universale. E questo sarà l'ulteriore passo.

Definizione 8. (Morfismo universale come oggetto iniziale o terminale di una categoria comma) (cfr. (Wang, 2011, p. 4-5)**)**
Sia c un oggetto nella categoria comma **C** e *sia F:* **B** → **C** *un funtore, ovvero:* $(*) \xrightarrow{c}$ **C** $\xleftarrow{F}$ **B.** *Se noi consideriamo c come un funtore dalla categoria unaria a un solo oggetto* $(*)$ *e il suo morfismo di identità su* **C,** *possiamo definire il "morfismo universale" da c al funtore F* $(c \downarrow F)$ *come l'oggetto inziale nella categoria-comma* **C,** *e dualmente il morfismo universale dal funtore F a c* $(F \downarrow c)$ *come l'oggetto finale nella categoria-comma* **C.**

- ♦ È chiaro che gli oggetti in $(c \downarrow F)$ hanno la natura triadica tipica degli oggetti di una categoria-comma, e cioè $(*, b, f)$ per un qualche oggetto b in **B.** Questa costruzione ci fornisce il morfismo in **C**: $f: c \to Fb$. Supponiamo adesso che $(*, i, f_i)$ sia l'oggetto **iniziale** nella categoria-comma **C**. Ciò significa che esiste un unico morfismo $(1_*, g)$ da $(*, i, f_i)$ a un altro oggetto $(*, b, f)$. I morfismi in questa categoria-comma fanno sì che il relativo diagramma commuti.
- ♦ Analoga costruzione, duale alla precedente per il morfismo universale $(F \downarrow c)$ di una categoria-comma con un oggetto **terminale** $(t, *, f_t)$**,** dove per ogni oggetto

$(b,*,f)$ esiste un unico morfismo $(g, 1_*)$ all'oggetto terminale tale che il relativo diagramma di morfismi commuti.

♦ I due diagrammi commutativi sono mostrati qui di seguito a fianco l'uno dell'altro, in modo da evidenziare la loro **dualità,** rispetto all'oggetto iniziale/terminale in **C** (Wang, 2011, p. 4-5)**.**

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f"'] & Fi \arrow[d, dashed, "Fg\ \text{(unique)}"] \\ & Fb \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Ft \arrow[r, "f_t"] & c \\ Fb \arrow[u, dashed, "Fg\ \text{(unique)}"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 11. Diagrammi commutativi di morfismi universali come oggetto iniziale (sinistra) o terminale (destra) di una categoria-comma, ciascuno caratterizzati da un morfismo universale (unico) *Fg*.

♦ La nozione di **morfismo universale** è comunque essenziale per noi perché limiti e colimiti sono appunto due tipi di morfismi universali che – per i nostri scopi – servono a dare generalità ad altre costruzioni universali, nel nostro caso, a intere categorie di prodotti e coprodotti rispettivamente. I colimiti, in particolare, ci servono per costituire **predicati/funzioni** giustificando il passaggio diretto dalla fisica alla logica grazie al "ponte" dell'equivalenza duale fra coalgebre in fisica e algebre in logica e quindi "svelando" quella che Kant nella *Ragion Pura* definiva "l'arte segreta della mente" nel dotare i predicati di domini di oggetti, senza però dare come nel concettualismo moderno alcuna **funzione costitutiva alla coscienza.**

- Il passaggio ancora mancante è quello, allora, di giustificare morfismi universali per **categorie di funtori *F*,** ovvero i cui oggetti sono funtori fra diverse categorie e i cui morfismi sono **morfismi universali fra funtori *Ff*.**
- Ciò significa che i funtori fra categorie di funtori avranno la forma non di semplici morfismi, ma di **diagrammi commutativi** triangolari di morfismi come quelli di **Figura 11,** interpretati però come **funtori** fra categorie e non come semplici (omo)morfismi fra oggetti.
- Per capire che struttura avrà la categoria-comma così risultante dei **limiti** e dei **colimiti**, bisogna compiere un ultimo passo che può essere illustrato, di nuovo, a

partire dalla nozione/operazione insiemistica corrispondente, proprio come abbiamo fatto per **prodotti e coprodotti** di insiemi.

- Il punto di partenza insiemistico è quello dell'**indicizzazione di una famiglia di insiemi** mediante un **insieme fisso di valori,** o, equivalentemente per mezzo di una **funzione** da un insieme indicizzante a una classe di insiemi.
- In termini categoriali, infatti, un limite o un colimite inteso come un **diagramma commutativo** è una collezione di oggetti e morfismi **indicizzati** da una **categoria fissa** (che sarà una cosiddetta **piccola categoria,** ovvero una categoria dove le collezioni dei suoi oggetti sono classi di insiemi). Equivalentemente, sarà un **funtore** che avrà la forma di un diagramma come quello di **Figura 11** e sarà quindi un **morfismo universale** da una **categoria indicizzante I** a una qualche altra categoria **C**.
- In altri termini, noi qui consideriamo un diagramma di lato *I* come un funtore *F* da una piccola categoria di indici **I** a una qualsiasi categoria **C**, cioè**,** F: $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{C}$**.** Un morfismo $F \rightarrow F'$ fra diagrammi di lato *I* sarà dunque una **trasformazione naturale** fra funtori.

Definizione 9. (Trasformazioni naturali)
Siano F, G: **C** → **D** *due funtori, sia ambedue covarianti che ambedue controvarianti tra le stesse due categorie. Una "trasformazione naturale" t: F → G è una famiglia di morfismi in* **D** *indicizzata da oggetti A di* **C:** $\{t_A\colon FA \to GA\}_{A \in \mathrm{Og}(\mathbf{C})}$ *tale che per tutti i morfismi f: A → B, il seguente diagramma commuta:*

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "Ff"] \arrow[d, "t_A"'] & FB \arrow[d, "t_B"] \\ GA \arrow[r, "Gf"'] & GB \end{tikzcd}$$

Questa condizione è definita "naturalità". Se ogni t_A è invertibile e quindi è un isomorfismo, t è un "isomorfismo naturale": $t\colon F \overset{\cong}{\to} G$*, cioè, F e G sono "naturalmente isomorfi", ovvero:* $F \cong G$.

♦ Dato che il morfismo *F → F'* fra diagrammi (funtori) di lato *I* fra le due categorie **I** e **C** sopra definite soddisfa la condizione di naturalità, possiamo interpretare la **categoria di diagrammi commutativi di lato *I*** come la **categoria di funtori $\mathbf{C}^{\mathbf{I}}$**. Ciò significa che per ogni oggetto *c* in **C** esiste un **funtore diagonale** ovvero un

diagramma costante (gli indici sono fissi e dunque delle costanti): Δ_c: **I** → **C** che mappa ogni oggetto in **I**, *i, j* a *c* in **C** e ogni morfismo in **I** a 1_c.

- Possiamo perciò definire il **funtore diagonale** Δ: **I** → **C** come il funtore che assegna a ciascun oggetto *c* di **C** il diagramma (funtore costante) Δ_c, e a ogni morfismo $f: c \to c'$ in **C** la trasformazione naturale $\Delta f = \Delta c \to \Delta c'$. Poiché Δ_c e $\Delta_{c'}$ sono funtori costanti Δf è esattamente il morfismo $f: c \to c'$ per ogni oggetto in **I.**
- È difficile esagerare l'importanza della nozione di "funtore diagonale". Basta ricordare qui che una delle sue applicazioni consiste nella generalizzazione in TC della nozione fondamentale della **forma diagonale** di una matrice $n \times m$ nel calcolo matriciale su spazi vettoriali mediante cui si ottengono gli **autovalori** della matrice stessa e quindi le soluzioni del calcolo matriciale in oggetto.
- Questo formalismo è infatti il cuore dei calcoli su matrici che si applicano in tutta la fisica classica e quantistica, ma anche nel **formalismo delle reti neurali** in informatica e, soprattutto, in una particolare versione della **logica quantistica** la cosiddetta ***Eigenlogik*** definita sugli **autovalori delle matrici di Pauli** della QFT (Toffano & Dubois, 2020; Basti, Capolupo, & Vitiello, 2020), di cui accenneremo qualcosa in §9.2.

- A questo punto possiamo dare la definizione cercata di **limiti** e **colimiti** come **oggetti terminali (finale e iniziale, rispettivamente)** di categorie-comma indicizzate in **I** e quindi come **universalizzazione** in TC di diverse categorie di oggetti fondamentali in matematica e in logica, **tutte** interpretate in TC come **categorie di coni (dualmente co-coni) di morfismi.** Per i nostri scopi, come universalizzazione categoriale delle nozioni di **prodotti e coprodotti** nelle strutture algebriche da cui emerge immediatamente la loro **dualità** e quindi la loro funzione nella **logica algebrica della TC.**

Definizione 10. (Definizione categoriale di limiti e colimiti)
Possiamo connotare un funtore F dalla categoria-indice **I** *alla categoria* **C,** F: $\mathbf{I} \to \mathbf{C}$, *come un diagramma su* **I** *in* **C.** *È evidente che F è un oggetto nella categoria di funtori* $\mathbf{C}^{\mathbf{I}}$. *Il "limite" di un diagramma F siffatto, denotato come* Lim$F$, *è un morfismo universale dal funtore diagonale* Δ *a* F. *Dualmente, il "colimite" del diagramma F, denotato come* Colim$F$ *è un morfismo universale da F al funtore diagonale* Δ.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Lim}\,F \arrow[dl, "\eta_i"'] \arrow[dr, "\eta_j"] & \\
Fi \arrow[rr, "Ff"'] & & Fj
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fi \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\iota_i"'] & & Fj \arrow[dl, "\iota_j"] \\
 & \mathrm{Colim}\,F &
\end{tikzcd}
$$

- ♦ Dalla definizione di morfismo universale (**Definizione 8.**) si evince immediatamente che limiti e colimiti sono **oggetti finali,** rispettivamente **terminali** nella categoria-comma $(\Delta\!\downarrow F)$ per i **limiti,** e **iniziali** nella categoria-comma $(F \downarrow \Delta)$ per i **colimiti**. Ciò diventa molto più chiaro, quando teniamo presente che le due categorie-comma in questione sono altrettante categorie di **coni e co-coni di morfismi** sui rispettivi diagrammi *F* e denotati come $\mathbf{Cone_F}$ e $\mathbf{Cocone_F}$.
- ♦ Per illustrare questa ulteriore, fondamentale, nozione, aggiungiamo un altro oggetto appartenente alla categoria **C** indicizzata da **I**, che denoteremo *X* (Id_X) per i coni e *Y* (Id_Y) per i coconi per evitare confusioni. Cominciamo dai coni.
- ♦ Dato un diagramma *F* con origine (*source*) in **I** e termine (*target*) in **C**, vi è un oggetto Lim*F* con gli associati morfismi da Lim*F* a ogni oggetto F_j nella categoria di funtori $\mathbf{C}^{\mathbf{I}}$ e dove $j \in \mathrm{Og}(\mathbf{I})$, tale che Lim*F* e i suoi morfismi associati η_i, η_j

commutano con tutti i morfismi Ff dove f è un morfismo in **I,** e soddisfano la proprietà universale che se un altro oggetto X in **C** e i suoi morfismi χ_i, χ_j da X a tutti gli F_j commutano con i morfismi Ff, allora esiste un **morfismo universale** $g: X \rightarrow \mathrm{Lim}F$, tale che per ogni $f: i \rightarrow j$ in **I** il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[ddl, bend right, "\chi_i"'] \arrow[ddr, bend left, "\chi_j"] & \\
& \mathrm{Lim}\, F \arrow[dl, "\eta_i"'] \arrow[dr, "\eta_j"] & \\
Fi \arrow[rr, "Ff"'] & & Fj
\end{tikzcd}$$

♦ Dualmente, per la categoria dei **coconi.** In questo caso, si tratta di un cocono relativo all'oggetto Colim$F$ con i suoi morfismi ι_i, ι_j come suo oggetto iniziale. Anche questa costruzione è universale poiché, dato un qualsiasi oggetto Y (Id_Y) e i suoi morfismi associati v_i, v_j da ciascun F_i , F_j a Y anch'essi commutano con tutti i morfismi Ff, e quindi esiste un unico morfismo universale h: Colim$F \rightarrow Y$, tale che per ogni morfismo $f: i \rightarrow j$ in **I,** il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
Fi \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\iota_i"'] \arrow[ddr, bend right, "\upsilon_i"'] & & Fj \arrow[dl, "\iota_j"] \arrow[ddl, bend left, "\upsilon_j"] \\
& \mathrm{Colim}\, F \arrow[d, dashed, "h"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

- Dal disegno dei due diagrammi implicati da coni e coconi appare immediatamente il senso di questa denotazione. Infatti, abbiamo un solo oggetto, il **vertice**, insieme con i suoi morfismi a tutti gli altri oggetti nell'immagine del diagramma *F* che così sembrano la **base** di un cono o di un cono rovesciato (cocono).
- In particolare, queste costruzioni danno universalità categoriale a **prodotti** e **coprodotti** interpretati come **limiti e colimiti** di coni e coconi di morfismi.

Definizione 11. (Definizione categoriale di prodotti come coni).
Sia $\mathcal{S}$ un insieme di oggetti nella categoria **C.** *Il prodotto di oggetti in $\mathcal{S}$ è un oggetto in* **C,** *denotato come $\prod_{S\in\mathcal{S}} S$ insieme con i suoi morfismi (proiettivi, cfr.* **Definizione 5.***) $\eta_S\colon \prod_{S\in\mathcal{S}} S \to S$ per ogni oggetto $S \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. Questa costruzione è universale poiché se X è un altro insieme che è un oggetto in* **C,** *con morfismi $\chi_S\colon X \to S$ per ogni oggetto $S \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$*, *allora esiste un morfismo universale (unico) $g\colon X \to \prod_{S\in\mathcal{S}} S$ tale che per ogni oggetto $S \in \mathcal{S}$ $\chi_S = \eta_s \circ g$.*

♦ Se si confronta la precedente definizione col grafico di un **cono** di morfismi si vede chiaramente che il **prodotto** $\prod_{s \in \mathcal{S}} S$ svolge la medesima funzione nella costruzione del **limite** Lim$F$, dando in quanto oggetto **terminale,** codominio del relativo morfismo universale (che ha per dominio un qualsiasi oggetto in S) – unicità e dunque **universalità categoriale** a tutta la costruzione dei prodotti (p.es., del prodotto cartesiano di insiemi) – in una qualsiasi struttura algebrica $A \times A \rightarrow A$. Essa anzi in questa costruzione universale trova piena giustificazione a questa sua connotazione.

Definizione 12. (Definizione categoriale di coprodotti come coconi)

Dualmente, il coprodotto di oggetti in $\mathcal{S}$ *è un oggetto in* **C,** *denotato come* $\coprod_{s \in \mathcal{S}} S$ *insieme con i suoi morfismi (iniettivi, cfr .***Definizione 6.** *)* $i_S\colon \coprod_{s \in \mathcal{S}} S \rightarrow S$ *per ogni oggetto* $S \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$. *Questa costruzione è universale poiché se Y è un altro insieme che è un oggetto in* **C,** *con morfismi* $v_S\colon S \rightarrow Y$ *per ogni oggetto* $S \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$, *allora esiste un morfismo universale (unico)* $h\colon \coprod_{s \in \mathcal{S}} S \rightarrow Y$ *tale che per ogni oggetto* $S \in \mathcal{S}$ vale l'identità $v_S = g \circ \iota_S$.

- ♦ Analogamente a quanto fatto per i limiti, basta confrontare la precedente definizione col grafico di un **cocono di morfismi** per vedere chiaramente che il **coprodotto** $\coprod_{s\in\mathcal{S}} S$ svolge la medesima funzione nella costruzione del **colimite** Co-lim$F$, dando in quanto oggetto **iniziale,** dominio del relativo morfismo universale (che ha per dominio un qualsiasi oggetto in *S*) – unicità e dunque **universalità categoriale** a tutta la costruzione dei coprodotti come coconi (p.es., nel "cucire insieme" gli elementi del dominio di una qualche funzione/predicato) – in una qualsiasi struttura coalgebrica $A \to A \times A$. Essa anzi in questa costruzione universale trova piena giustificazione a questa sua connotazione.
- ♦ Quale il risultato notevole che otteniamo in questo modo? Il risultato è quello di giustificare l'interpretazione di una categoria di coprodotti come una particolare categoria-comma, quella di **coconi di morfismi.** Ognuno di essi grazie al morfismo universale con il colimite $\coprod_{s\in\mathcal{S}} S$ come oggetto iniziale di questa categoria, può essere **indicizzato univocamente** come si richiede a qualsiasi **costruzione universale consistente** in logica e matematica (cfr. quanto dicevamo a proposito della nozione dell'**ordinamento per tipi** in una logica-matematica sia a fondazione insiemistica in §8.1.2, sia a fondazione categoriale in §8.1.3).

- L'interpretazione categoriale di ciascun coprodotto di insiemi come cocono univocamente indicizzato di morfismi che hanno come comune codominio un unico oggetto Y ovvero un unico $\boldsymbol{Id_Y}$ e come dominio una partizione di sotto-insiemi dell'insieme S di partenza **strutturati (*patterned*) in unico oggetto,** abbiamo il risultato di aver **costruito** il dominio di una **funzione e/o predicato.**
- In altri termini, mentre nel tradizionale approccio insiemistico (*set-theoretic way of thinking*) il dominio di un predicato **supponeva** l'esistenza del predicato/funzione come elemento di V (cfr. §8.1.2), nell'approccio categoriale (*arrow-theoretic way of thinking*) il dominio viene **costruito** come risultato di un **calcolo di relazioni universale consistente,** compreso il suo **"identificatore universale"** (*label*) Id_Y. Un risultato tanto più significativo quando teniamo presente che i morfismi in questione possono essere **processi omotopici** (cfr. §8.1.3) nel senso topologico del termine.
- Possiamo ora comprendere quella connotazione data in precedenza dell'operazione di colimite come formalizzazione in TC della nozione, finora abbastanza vaga in filosofia della natura e della scienza, di **emergenza di un oggetto com-**

plesso dalla strutturazione di oggetti (più) semplici, generalmente messa in corrispondenza col principio aristotelico dell'**eduzione di una nuova forma naturale** dai suoi elementi come
Sintesi di oggetti complessi da oggetti più elementari (…) che porta all'emergenza di oggetti e processi più complessi (Ehresmann & Vanbremeersch, 2019, p. 4)

- ♦ Torniamo adesso all'esemplificazione di §8.2.1.2. Possiamo adesso descriverlo come il vertice (risultato) di un cocono di morfismi (processi fisici) che determinano **l'emergenza dell'oggetto complesso-gatto** (la specie dei gatti), che denotiamo qui come G e del suo predicato/funzione "esser-gatto" Id_G che identificano la relativa sotto-categoria di tutti i gatti, che ha come suo dominio di definizione una **partizione strutturata** (*pattern*) delle proprietà comuni alla categoria dei felini (genere dei felini), F.
- ♦ Esso sarà univocamente (universalmente) distinto dal vertice di un altro cocono di morfismi (processi fisici) che determinano **l'emergenza dell'oggetto complesso-tigre** (la specie delle tigri), che denotiamo qui come T e del suo predicato/funzione "esser-tigri" Id_T che identificano la relativa sotto-categoria di tutte le tigri,

che ha come suo dominio di definizione una **partizione strutturata** (*pattern*) delle proprietà comuni alla categoria dei felini (genere dei felini), *F*.

- Ovviamente la categoria dei felini *F* è a sua volta sotto-categoria della categoria, diciamo degli animali *A,* essendo il predicato "essere felino" il vertice Id_F di un altro cocono di morfismi che ha come dominio una **partizione strutturata** (*pattern)* di caratteristiche comuni al genere animale, e così via.
- È questo il senso di avere un **indicizzatore unico** di tutte le sotto-categorie di coni di morfismi, ciascuno corrispondente a una categoria di oggetti di grado crescente di complessità e che corrisponde ad una **struttura ad albero** insiemi-sottoinsiemi – in natura, **generi-specie**.
- Proprio per queste eccezionali proprietà delle **coalgebre** si è vista la necessità di sviluppare una particolare **teoria assiomatica degli insiemi** usando la TC che potesse profittare al massimo delle peculiarità di quelle strutture ad albero che abbiamo introdotto.
- Insiemi che a differenza delle teorie standard degli insiemi come ZF non fossero basati sull'**ordinamento totale** degli insiemi stessi che suppongono che esista

un'unica relazione di ordinamento fra tutti gli insiemi e che non può essere supposta, per esempio, in **un'articolazione genere-specie**.

- P.es., se formalizzassi le varie specie di mammiferi (umani, cavalli, scoiattoli, delfini, elefanti) come ordinarli in un'unica sequenza maggiore-uguale (≥). Come faccio a dire che la specie dei delfini può essere ordinata rispetto a quella degli elefanti o degli scoiattoli?
- È chiaro che devo avere una teoria degli insiemi in cui da un medesimo sopra-insieme derivino diversi **percorsi (*paths*) di ordinamento parziale** non ordinabili fra di loro ma solo rispetto alla loro **radice comune.** Nel nostro caso l'essere-mammiferi.
- Un problema che emerge in generale non solo in biologia, ma in tutta **la fisica della materia condensata** che ha nella QFT e nel suo **formalismo coalgebrico** la sua fisica fondamentale.
- È questa la teoria degli **insiemi non-benfondati** sviluppata alla fine degli anni '90 dal matematico inglese Peter Aczel – uno dei membri del programma di ricerca della HoTT.

8.2.3. Insiemi non-benfondati e la Coalgebra come Teoria Generale dei Sistemi

8.2.3.1. Le origini: infinite inclusioni

- D'ora in poi, però ci concentreremo sulla categoria delle coalgebre **Coalg(Ω)** per fornire due esempi fondamentali della loro "duttilità", **logica e ontologica,** innanzitutto, e quindi in **fisica ed informatica** dove si è arrivati a definire la Coalgebra una **Teoria Generale dei Sistemi** sia dinamici che computazionali (Rutten, 2000).
- L'intuizione che soggiace alla **teoria degli insiemi non-benfondati di Peter Aczel** (*non-wellfounded sets, NWFS*) che qui esamineremo fu originariamente ispirata dalla **«Teoria Base degli Insiemi»** di Ennio De Giorgi, uno dei più grandi matematici del XX secolo, nei suoi famosi seminari sui Fondamenti della Matematica alla Scuola Normale Superiore di Pisa.
- Ennio De Giorgi fu anche **ispiratore e fondatore di IRAFS alla PUL**, con i professori Edward Nelson di Princeton e Gianfranco Basti della PUL, per estendere alla filosofia formale queste idee (scarica articolo sulla teoria di De Giorgi dal portale IRAFS:

http://irafs.org/irafs_1/texts/Articolo%20Forti.pdf e l'ultimo articolo da lui scritto per IRAFS prima di morire "Verso i sistemi assiomatici del 2000".

- Altri lavori sull'iniziale ricerca sui fondamenti all'IRAFS possono trovarsi nel primo sito di IRAFS I, alla pagina dei download).
  - La prematura morte del prof. De Giorgi (1996) bloccò sul nascere questo programma a IRAFS che poi è cresciuto per suo conto nel resto del mondo, innanzitutto con i lavori di Marco Forti e poi con quello di Aczel a conferma della sua bontà ed effettività. Cfr. sulla questione (Sangiorgi 2012b, 19ss.)[4].
  - L'intuizione comune a tutti questi autori consiste nel consentire in teoria degli insiemi la possibilità di **un'illimitata catena di inclusioni** che, nelle originarie intenzioni filosofiche di De Giorgi consentisse di separare omomorfismi da isomorfismi (cfr. **Figura 9**) e quindi di studiare "il principio di forma" *qua talis* (De Giorgi era un platonico convinto).
  - Una inaspettata ma congruente ulteriore prospettiva di quest'approccio si è recentemente aperta in QFT **modellizzata coalgebricamente,** per affrontare formalmente il **problema delle infinite rotture di simmetria del vuoto quantistico** e quindi degli **infiniti gradi di libertà della QFT** legati al famoso "Teorema di Haag" (1959), e

che non può essere affrontata coi formalismi classici della meccanica statistica alla base della QM.

8.2.3.2. Assioma di anti-fondazione (anti-foundation axiom, AFA)

- Peter Aczel alla fine degli anni '80 dello scorso secolo ha inteso perseguire questo scopo nella maniera più diretta possibile, mediante la rimozione dell'**assioma di fondazione** di ZF – presente comunque in forme differenti in tutte le teorie (per questo definite "standard") degli insiemi – proponendo una teoria degli insiemi basata sull'**assioma di anti-fondazione** (*anti-foundation axiom*, AFA).
- L'assioma di fondazione in ZF prende di solito il nome di **assioma di regolarità (o di specificazione),** ed afferma in buona sostanza che ogni insieme non-vuoto A contiene un elemento disgiunto da A. Nella logica del primo ordine, questo assioma si legge:

$$\forall x\left(x \neq \varnothing \rightarrow \exists y \in x\left(y \cap x = \varnothing\right)\right)$$

  - Questo significa che **nessun insieme ben-fondato *x* può includere se stesso**, perché contiene sempre un elemento disgiunto y. Quindi non è ammessa alcuna catena infinita di inclusioni (x include se stesso, include se stesso, include se stesso…). Questa non-infinità della catena delle inclusioni è ciò che consente alla catena di essere limitata inferiormente e quindi agli insiemi di essere **totalmente ordinati**.

- Attraverso l'**assioma di scelta** in ZFC (ZF + assioma di scelta (*choice*)) – come pure con forme più deboli di esso come il Lemma di Zorn: quello che Stone ha dovuto usare per garantire il duale di un ultrafiltro, il primo ideale (cfr. §7.4.2) – il risultato può essere **invertito**: se non vi sono queste infinite sequenze, allora l'assioma di regolarità è vero.
  *«Il termine "insieme non-benfondato" si riferisce a insiemi che **contengono se stessi come membri** e, più generalmente sono parti di un'**infinita sequenza di insiemi** ognuno dei quali è elemento dell'insieme precedente. Così essi manifestano una **oggettiva circolarità** in una maniera assolutamente evidente» (Moss, 2017)*[5].
- **L'assioma di anti-fondazione** di Aczel afferma: "ogni grafo (che rappresenta un insieme) ha un'unica decorazione" (Aczel 1988).
- Un enunciato all'apparenza criptico, ma che è molto difficile esprimere in maniera più semplice con altre parole, e che perciò adesso spieghiamo.

8.2.3.3. Rappresentazione di insiemi mediante grafi

- Il punto di partenza è che ogni insieme (standard o no) può essere rappresentato come un **grafico accessibile puntato (*accessible pointed graph* (APG)),** ovvero, come un grafico della TC, cioè come un insieme di **nodi** che rappresentano i sottoinsiemi dell'insieme di partenza (**= radice del grafo**) **e bordi** che rappresentano le **relazioni di inclusione** fra sottoinsiemi dell'insieme di partenza. Ogni bordo è dunque **una coppia ordinata** di nodi (sottoinsiemi) (n, n').
- Se (n, n') è un bordo, allora scriverò $n \rightarrow n'$ e dirò che n' è **figlio** di n. Un **percorso (*path*)** è una sequenza finita o infinita $n^0 \rightarrow n^1 \rightarrow n^2 \rightarrow$ ... di nodi n^0, n^1, n^2, … legati da bordi (n^0, n^1), (n^1, n^2). Un **grafo puntato** è un grafo con un nodo distinto chiamato il suo **punto,** di solito n^0 che rappresenta l'insieme**.** Un grafo puntato è **accessibile,** se per ogni nodo n esiste un percorso $n^0 \rightarrow n^1 \rightarrow n^2 \rightarrow$ ... n dal punto n^0 al punto n. Se questo percorso è **unico,** allora questo grafo è un **diagramma ad albero** e il punto è la **radice** dell'albero. [Si noterà il rapporto con la teoria dei frame di Kripke, caratterizzata dalla relazione di **accessibilità…**].
- Nei diagrammi, il punto (= insieme) sarà sempre localizzato al **vertice.** Una **decorazione** di un grafo è l'assegnazione di un insieme a ogni nodo del grafo in modo

che gli elementi dell'insieme assegnato a un nodo siano gli insiemi assegnati ai figli di quel nodo. Una **rappresentazione (*picture*)** di un insieme è un APG in cui l'insieme rappresentato è quello assegnato al punto (= radice o vertice del diagramma).

- Per esempio, nel caso dell'APG del numero 3, la decorazione è la seguente:

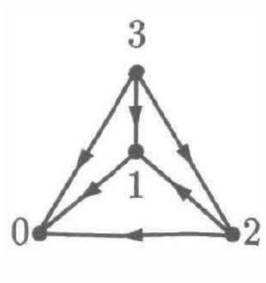


Figura 12. Rappresentazione insiemistica del numero 3 come grafico di relazioni (morfismi che sono inclusioni).

- Il nodo con l'etichetta 0 non ha figli e quindi ad esso va **sempre** assegnato **l'insieme vuoto ∅**, cioè 0, in ogni decorazione. Esso sarà dunque il nodo cui puntano tutti i morfismi del grafo. Il nodo centrale ha **sempre** come solo figlio il nodo etichettato 0. Quindi in ogni decorazione, al **nodo centrale** dev'essere assegnato **l'insieme {0}, cioè, 1.**

- ♦ Ogni insieme standard o non-standard può essere rappresentato con un APG.
- ♦ Nel caso degli insiemi standard o ben-fondati vale il principio: ***ogni insieme ben-fondato ha un'unica decorazione*** → ogni APG è la **rappresentazione biunivoca** di un **unico insieme ben-fondato.**
- ♦ Nel caso di quelli non-benfondati vale invece il principio "ogni **grafo** ha un'unica decorazione". Ed essendo ormai smaliziati a distinguere omomorfismi da isomorfismi ci rendiamo conto che non è la stessa cosa, sebbene **l'unicità** è ciò che garantisce **universalità** e quindi **consistenza (verità) logico-matematica** nell'uno e nell'altro caso.
- ♦ Esistono, infatti, anche rappresentazioni di **insiemi non-benfondati.** Per vedere questo, noi assoceremo a ogni insieme a la sua **rappresentazione canonica.** Ovvero, formiamo il grafo i cui nodi sono quegli insiemi che appaiono in sequenze $a^0, a^1, a^2, \ldots$ tali che: $\ldots \in a^2 \in a^1 \in a^0 = a$, e che abbiano come bordi quelle coppie di nodi (x, y) tali che $y \in x$.
- ♦ Si noterà che in tal modo abbiamo **invertito la condizione** per la rappresentazione ad albero dell'insieme **dall'inclusione all'appartenenza.**

- Un siffatto APG **non richiede un insieme ben fondato.** Infatti, ogni rappresentazione di un insieme **può essere "dispiegato" (*unfolded*) in una rappresentazione ad albero dello stesso insieme.** Ovvero, dato un APG possiamo formare l'albero i cui nodi sono i percorsi finiti che cominciano dal punto dell'APG e i cui bordi sono coppie di percorsi della forma: $a^0 \rightarrow \ldots \rightarrow a$; $a^0 \rightarrow \ldots \rightarrow a \rightarrow a'$; …
- La radice di questo albero è il percorso a^0 di lunghezza uno. Questo albero è lo **svolgimento (*unfolding*)** dell'APG. Quindi, lo svolgimento di un APG rappresenterà qualsiasi insieme rappresentato dall'APG. Lo svolgimento della rappresentazione canonica di un insieme, sarà chiamato la **rappresentazione canonica ad albero** di quell'insieme.
- Da questa costruzione **l'assioma di anti-fondazione** deriva immediatamente e cioè:

  "Ogni grafo ha un'unica decorazione"
- Il fatto che ogni grafo abbia un'unica decorazione di insiemi garantisce **l'unicità e quindi l'universalità della rappresentazione grafica.**
- Allo stesso tempo, però, affermare che **ogni <u>grafo</u> ha un'unica decorazione di (sotto-)insiemi** non è assolutamente equivalente alla condizione che vale per gli

insiemi ben-fondati e cioè che **ogni <u>insieme</u> ha un'unica decorazione di (sotto-insiemi).**

- In altri termini a uno stesso insieme NWF si possono associare diverse decorazioni (di sotto-)insiemi, si possono cioè associare **diversi**, **unici** ma **reciprocamente irriducibili e non interscambiabili** alberi (e quindi percorsi/grafi) di inclusione di sottoinsiemi.
- Una condizione che dipende direttamente dal fatto che gli insiemi NWF **non sono totalmente ordinati**, ovvero non vale la condizione che fra una coppia qualsiasi di insiemi valga la relazione di ordinamento $\leq$. Se appartengono ad alberi diversi di svolgimento **non sono reciprocamente ordinabili**, anche se ultimamente hanno una radice comune.

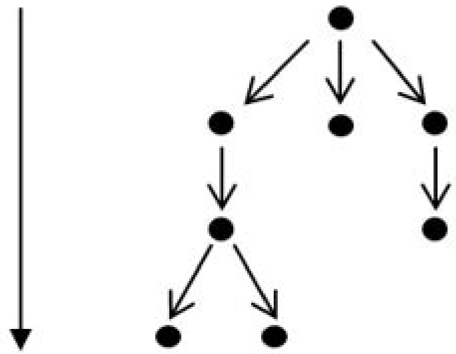


Figura 13. Grafico di un processo di “svolgimento” (*unfolding*) attraverso reciprocamente irriducibili percorsi di inclusione (“ammissibilità”∋) fra insiemi NWF parzialmente odinati.

♦ Ora, tutto questo nella **teoria dei sistemi dinamici non-lineari** (che sono la regola nei sistemi fisici di materia condensata, tanto in fisica classica come in QFT) corrisponde ad avere **alberi di biforcazione** delle traiettorie dello spazio degli stati della dinamica…

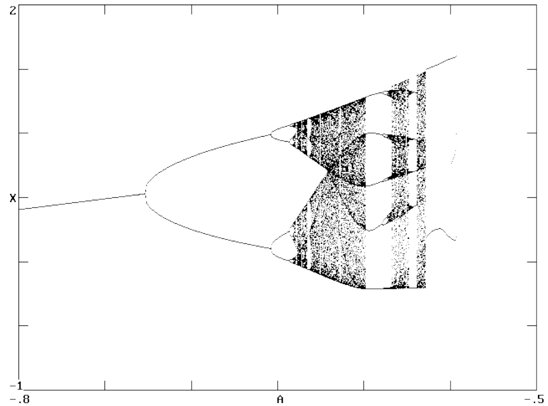


Figura 14. Albero di biforcazioni (di Hopf) di una dinamica non-lineare (la cosiddetta "mappa a tenda") che transita allo stato caotico (parte in grigio nel grafico), e che per definizione non si può formalizzare su insiemi totalmente ordinati

♦ In questo senso, dunque, si dovrà dire che un super-insieme (radice dell'albero) **ammette (∋),** ma non **include** (⊆) **i suoi sotto-insiemi (cfr. Figura 13),** il che significa che i diversi ordinamenti parziali dei sottoinsiemi dell'insieme-potenza di un dato insieme non seguono la **regola transitiva (relativa all'assioma 4 in LM),** ma la **regola euclidea (relativa all'assioma 5 o E in LM).**

- Questo è esattamente ciò di cui aveva bisogno la cosmologia e la biologia **evolutive** per poter formalizzare in una logica **necessariamente modale** la nozione di diversi **alberi evolutivi generi-specie, compatibili con un'unica origine,** mediante **processi biforcativi intrinsecamente non-lineari (cfr. Figura 14).**
- Ugualmente, in logica filosofica ciò è quanto avevano bisogno **metafisiche non-razionaliste (= non-univocità dell'essere: "l'essere si dice in molti modi") quale quella aristotelica e tommasiana** per formalizzare la nozione che da un genere le sue specie non possono essere **derivate logicamente (dedotte/predette).**
- Invece, esse possono essere **causalmente edotte** dalla materia secondo **una gerarchia di progressive attualizzazioni della sua potenzialità** (in termini moderni, è il concetto di "emergenza" di un sistema complesso che già abbiamo incontrato discutendo dei colimiti: cfr. §8.2.2). Le diverse specie di enti perciò **non sono implicite in (logicamente implicate dal) comune genere di appartenenza** come le conclusioni nelle premesse, perché la medesima causa è compatibile con un numero (indefinito) di effetti attraverso diversi, sebbene **unici** (universali) e

quindi reciprocamente **irriducibili percorsi causali di derivazione-ammissibilità ("svolgimento") (∋)** da una radice comune.

- Infatti, ciò che è significativo è che, **tutti** gli insiemi NWF nella categoria delle coalgebre su spazi di Stone, **SCoalg,** condividono **un'unica radice comune *R*** da cui sono tutti "svolti" (*unfolded*) **(cfr. Figura 13)**, questa categoria soddisfa il potente **teorema della coalgebra finale** (cioè esiste un'unica coalgebra che è un oggetto terminale (Cfr. **Definizione 2.**) nella categoria **SCoalg.** Oggetto terminale che è l'origine comune di una famiglia di morfismi universali uno per ciascuna delle coalgebre della categoria (Aczel & Mendler, 1989)).
- Come Aczel stesso sottolinea, la radice comune di tutti gli insiemi SWF svolge nella teoria **un ruolo simile alla classe *V*** degli insiemi standard (cfr. §8.1.2).
- Con una fondamentale differenza però, che mentre tutti gli insiemi della teoria standard esistono insieme **in** *V* (grazie all'auto-identità della loro esistenza predicativa (cfr. §8.1.2), mentre gli insiemi SWF esistono **da** *R* man mano che sono effettivamente "svolti" (Aczel, 1988). Nella misura, cioè che soddisfano la rela-

zione di **accessibilità** da R e quindi la conseguente relazione **riflessiva** (autoinclusione) che garantisce in TC l'esistenza come **identità** Id_x o **univalenza** $\mathbb{1}_x$ di un oggetto x, ambedue schematizzate nel grafo 3. di **Figura 15**. riportata più sotto, dove è interpretata in termini modali.

- A questo punto, si può comprendere quello che era lo scopo ultimo che ha portato Aczel ha sviluppare la sua teoria coalgebrica degli insiemi SWF su spazi di Stone. Garantire formalmente una teoria della **computazione competitiva** fra algebre di Boole e coalgebre di Stone su insiemi NWF tali che, mediante l'applicazione di un funtore controvariante fra queste due categorie dualmente equivalenti $\mathbf{SCoalg(\Omega)} \rightleftharpoons \mathbf{BAlg(\Omega)^{op}}$, le due procedure **coinduttive** coalgebriche (↓: limitate superiormente, ma non inferiormente) e **induttive** algebriche (↑: limitate inferiormente, ma non superiormente) si **limitassero reciprocamente** in modo **finitario** così da affrontare in modo originale ed effettivo perché non predicativo un problema millenario della **matematica costruttiva** (Abramsky, 2005)**,** noto fin dai tempi delle esaustioni di Eudosso (IV sec. a.C.), come mostrato intuitivamente nella seguente figura (cfr. anche §8.2.4.1).

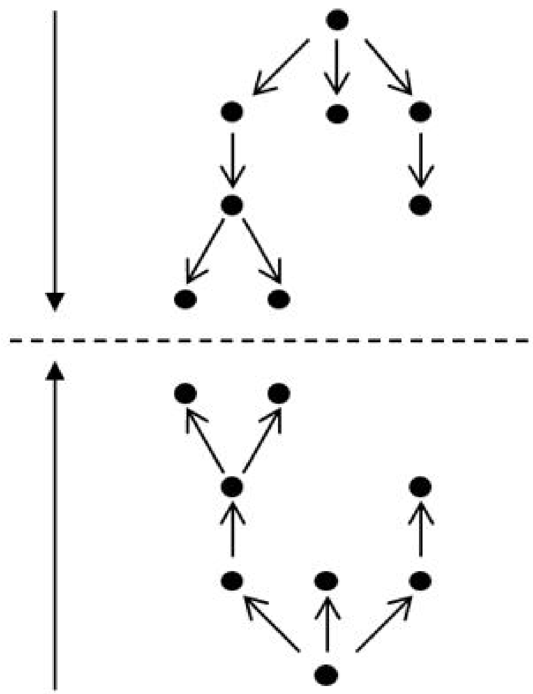


Figura 15. Rappresentazione della computazione competitiva algebra-coalgebra dove una struttura coalgebrica di insiemi NWF "rispecchiandosi" (*mirroring*) dualmente in quella della corrispondente struttura algebrica si limitano reciprocamente su base finitaria (cfr. la dualità limiti-colimiti in § 8.2.2).

- Il problema individuato da Eudosso col suo metodo dell'esaustione era infatti quello che se usi una procedura iterativa (algebrica, diremmo oggi) di costruzione della circonferenza moltiplicando i lati del poligono iscritto.
- La soluzione del problema richiede necessariamente che l'oggetto infinito (il cerchio) sia già definito, perché la procedura diventa terminante (ed effettiva: quando il processo si ferma se il limite infinito non fosse già definito?) solo supponendo una **matematica infinitaria** (platonica, di cui Eudosso era non casualmente un discepolo all'Accademia), come un tentativo molto più recente di **approccio costruttivo** (algebrico) all'aritmetica predicativa – di un altro eminente matematico del XX sec., cofondatore con De Giorgi di IRAFS, Edward Nelson dell'Università di Princeton – ha dovuto amaramente constatare (Nelson, 1986; 2005).
- Non banalmente, infatti, se facessimo uno "zoom" entro ciascuno dei punti degli schemi ad albero in figura ognuno dei quali rappresenta un insieme NWF, queste strutture sono il corrispondente degli schemi ad albero di coprodotti e prodotti rappresentati categorialmente come colimiti e limiti e quindi come coconi e coni di morfismi (Cfr. **Definizione 10.**) in strutture coalgebriche e algebriche.

- In termini logici e ontologici, più vicini a noi è come se l'applicazione del funtore controvariante Ω dell'equivalenza duale **SCoalg(Ω)⇌BAlg(Ω)$^{\mathbf{op}}$** mappasse l' ∋ della coappartenenza ("causale") di una *SCoalg* sull'∈ della appartenenza ("logica") nella corrispondente *BAlg* così da rendere i due asserti costruiti su queste strutture **dualmente equivalenti:** $\alpha \leftrightarrows \alpha^{\mathbf{op}}$
- In termini semplici, "In TC, è vero che: la classe dei cavalli appartiene (∈) alla classe dei mammiferi (logicamente, algebricamente) **se e solo se** la specie dei cavalli è ammissibile (co-appartiene, coalgebricamente) (∋) dal (al) genere dei mammiferi".
- In soldoni, solo **logicamente** (astrattamente) "delfini", "cavalli", "rinoceronti", "elefanti" e "uomini" **sono tutti mammiferi allo stesso modo, realmente** (ontologicamente) lo sono secondo **diverse modalità causali e quindi di esistenza fisica.** Infatti, biologicamente, i loro DNA sono diversi e solo con alcune sequenze comuni perché ambedue mammiferi…

♦ In simboli:

$$\left(\underbrace{cavalli \in mammiferi}_{\text{Algebra di Boole}(\Omega^{op})\ [\text{logica}]} \quad \underbrace{\overset{\rightleftarrows}{\longleftarrow}}_{\text{Equivalenza duale funtoriale}} \quad \underbrace{cavalli \ni mammiferi}_{\text{Stone Coalgebra}(\Omega)\ [\text{fisica}]} \right)$$

Dove il simbolo di equivalenza duale funtoriale è propriamente quello denotante un **morfismo limitato (*bounded morphism*)** che caratterizza la semantica coalgebrica per la teoria dei modelli di Kripke (cfr. (Goranko & Otto, 2007) e §8.2.4.2).

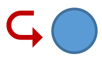
♦ Tutto questo, finalmente, giustifica formalmente l'asserto tipico dell'ontologia aristotelico-tomista che, sebbene il predicato **"essere-ente"** è il predicato più universale di tutti, perché qualsiasi cosa è ente, pur tuttavia l'essere non è un genere **il genere generalissimo o la categoria predicativa di tutte le categorie,** propria di tutte le metafisiche razionaliste, quella hegeliana in primo luogo. È invece un **trascendentale** poiché trascende e fonda tutte le categorie predicative di enti.

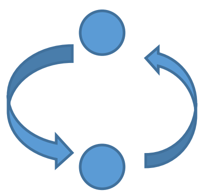
♦ Infatti, "essere ente" si dice in molti modi ognuno designato dal nome denotante un genere/specie che si associa alla destra della copula "è" ($\in$) di un enunciato predicativo, corrispondente al nodo del relativo albero di derivazioni causali ($\ni$)

da **un’unica causa** – nella rappresentazione NWFS, corrispondente all’unica decorazione del grafo APG da un’unica radice.

- Infatti, poiché AFA consente **le auto-inclusioni di insiemi,** i seguenti grafi sono tutti ammessi:

1. Il grafo orientato con un solo nodo e un bordo dal nodo a se stesso corrisponde all’insieme della forma: $x = \{x\}$.
2. Un grafo orientato a ciclo di lunghezza 2 corrisponde a un insieme della forma $x = \{\{x\}\}$.
3. Un grafo orientato di lunghezza 2 con un solo ciclo, corrisponde all’insieme della forma $z = \{y, \{x\}\}$.

1. 

2. 

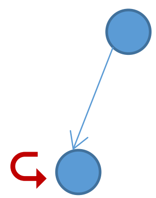
3. 

Figura 16. Grafi caratteristici di insiemi SWF

- Questi 3 grafi hanno una grande importanza nell’ontologia RN. Come formalizzazione dell’ontologia tommasiana perché rappresentano, nella formalizzazione della metafisica dell’essere-come-atto di Tommaso: 1) il concetto di **sostanza individuale** (prima) come capace di *reditio completa ad semetipsum,* cioè di sussistenza o “inseità e perseità (**unicità**)” ; 2) il concetto di **sostanza singola spirituale** come capace di doppia *reditio*, una ontologica l’altra logica, ovvero capace di sussistere perché capace di auto-conoscersi; 3) la **partecipazione diretta di ogni individuo all’essere per esistere**, dove la sorgente inaccessibile dell’essere che a tutti accede è l’Essere Sussistente. → i bordi di tutti gli APG di RN sono **inclusioni causali** di discendenti da unico ascendente, percorsi non tutti confrontabili per ordinamento quantitativo (≤) perché derivati da diversi percorsi di inclusione causale,
- Dal punto di vista **fisico** (e non metafisico), la radice comune dei grafi NWF corrispondente all’esistenza di un’unica **causa universale fisica** (il *Primus Movens* di Aristotele, corrispondente alla sfera cosmologica delle “stelle fisse”, moventi

ma non mosse), tutti gli enti in un universo, e/o in possibili molti universi (**multi-verso**), reciprocamente separati e non-comunicanti.

- Tale causa nell'attuale cosmologia quanto-relativista è il **vuoto quantistico con le sue infinite "rotture di simmetria" (cfr. §9.1),** ovvero la materia come "pree-sistente al(ai) big-bang(s)" all'origine dello (di ciascun) universo, visto che il tempo della relatività generale definito sui numeri **reali** (crescente dal passato al futuro) esiste solo **all'interno di ciascun universo,** ma sarebbe inserito in un **tempo "sferico"** (senza passato o futuro) definito sui numeri **complessi,** in un'ipotetica **Teoria del Tutto** che includesse tanto la fisica quantistica con i suoi "integrali di percorso" di Feynman definiti sul tempo complesso, che la relatività generale col suo tempo definito sui reali (cfr. (Hawking, 2011) e il cap. VI di (Basti, 2002)).
- In una **metafisica naturalista** come quella di Tommaso, o *trans-physicam* secondo la sua significativa definizione, il "passaggio al limite" metafisico si avrebbe solo se, con la Bibbia, ci interrogassimo sul **fondamento dell'esistenza della materia** come **pura potenza** (lo "abisso vuoto informe" sebbene "pieno di acqua increspata dal soffio divino" di Gen.1, 2 è dunque un vuoto "dinamico") a

tutte le forme naturali e che, ovviamente, suppone l'esistenza dell'**Atto Puro** o **Essere Sussistente.**

- Tuttavia "in principio" (metafisico non fisico, come invece è nella teoria "della spintarella iniziale" di Cartesio, per iniettare "da fuori" un'iniziale impulso nel suo universo come "sistema inerziale"), l'esistenza della potenza pura del "vuoto dinamico" biblico ("materia prima" in potenza a tutte le forme) è **prima del tempo** poiché il tempo biblico e metafisico delle origini, come quello della cosmologia quantistica, comincia ad essere scandito solo con le progressive "separazioni" (o "rotture di simmetria") nel vuoto informe originario, ovvero attraverso la progressiva e gerarchica emergenza ("eduzione") di forme (ordinamenti) materiali del nostro risultante **cosmo ordinato** (cfr. i "sette giorni" biblici di Gen. 1).
- A parte queste "meditazioni metafisiche" che ci introducono alla Parte IV del corso, dedicata alla ontologia formale del Realismo Naturale, occorre illustrare brevemente il concetto di **morfismo limitato** che è il cuore del bicondiziale ontologico e quindi della **semantica coalgebrica.**

8.2.3.4. Equivalenza per bisimilarità/bisimulazione

- ♦ Per capire la nozione di morfismo limitato introdotto più sopra dobbiamo introdurre un'altra fondamentale nozione che è possibile dimostrare in una teoria degli insiemi non-benfondati è la nozione di **equivalenza per bisimulazione/bisimilarità,** ovvero di **equivalenza** fra insiemi NWF dove ogni grafo ha un'unica decorazione di insiemi (ma senza la corrispondenza biunivoca grafi-insiemi delle teorie degli insiemi totalmente ordinati, ricordiamolo!), una nozione fondamentale in logica modale.
- ♦ **Bisimulazione:** Sia (G,→) un grafo orientato. Una relazione R su G è una **bisimulazione** se le seguenti relazioni sono soddisfatte, ogni volta che xRy, dove x,y sono nodi del relativo grafico [evitiamo qui di dare il grafico commutativo che attesta l'universalità della costruzione (Goranko & Otto, 2007)]:

1. Se $x \to x''$, allora vi è un $y \to y''$ tale che $x'' \, R \, y''$.
2. Se $y \to y''$, allora vi è un $x \to x''$ tale che $y'' \, R \, x''$.

- ♦ Naturalmente una tale insieme di relazioni può essere estesa dal grafo G ad un grafo H, etc.

- Quindi, quando una bisimulazione vale **per tutte** le **relazioni e i nodi** fra due (o più) grafi, essi sono in relazione di **bisimilarità**, cioè sono **equivalenti per bi-similarità**.
- Direttamente derivata dalla nozione di equivalenza per bisimilarità è quella di **equivalenza osservazionale** nel caso cioè di equivalenza fra nodi di un grafico in cui solo alcune caratteristiche dei nodi sono osservabili.
- Tale nozione ha un'immediata applicazione:

1. In **informatica:** due automi sono equivalenti se lo sono i loro comportamenti osservabili (p.es., il programma *Word* su piattaforma PC o Apple).
2. In **fisica quantistica:** dove l'equivalenza fra sistemi riguarda solo gli osservabili del sistema (operatori dei relativi spazi di Hilbert), essendo non osservabili i loro stati (per il principio di indeterminazione)

8.2.3.5. Induzione/coinduzione e logiche modali coalgebriche

- Per estendere alla logica queste nozioni di equivalenza occorre un'ultima notazione che avremo comunque già intuito. Normalmente nella logica insiemistica la semantica di un asserto di logica proposizionale, $\alpha \rightarrow \beta$, ovvero $[\![\alpha \rightarrow \beta]\!]$ se e solo se per i corrispondenti insiemi che definiscono la sua estensione (o significato estesionale) A, B vale: $(A \subseteq B)$. Ciò può essere formalizzato usando la cosiddetta **funzione-significato (*meaning function*): $(\boldsymbol{\varphi} \rightarrow \widetilde{\boldsymbol{\varphi}})$,** che mappa $\mapsto$ una funzione proposizionale φ sulla sua **estensione insiemistica,** cioè $[\![\alpha \rightarrow \beta]\!]$ $:= (\alpha \rightarrow \beta) \mapsto (A \subseteq B)$.

- Nel caso della logica dell'algebra booleana con operatori, data una formula proposizionale espressa in una logica equazionale su una struttura algebrica (*frame*) booleana $\mathbb{S}$, la sua funzione-significato corrisponderà ad una **mappa omomorfa controvariante** fra $\mathbb{S}$ e una struttura **algebrica complessa algebra-sottoalgebre** $\mathbb{S}^+$ su uno spazio di Stone, ovvero $\mathbb{S} \longmapsto \mathbb{S}^+$.
- Il che giustifica il motto: "il significato è un omomorfismo" (Venema, 2007), ovvero, è una *conformitas* fra la struttura di relazioni logiche nell'asserto e una struttura di relazioni causali nella realtà, ovvero un *adaequatio* dell'intelletto alla realtà dell'ontologia e quindi dell'epistemologia tomista (Basti, 2018).
- Ciò che è significativo è che nel caso che esista un **criterio di scelta fra gli insiemi ammissibili** nell'estensione $\mathbb{S}^+$, **la mappa del significato cambia verso,**

cioè $\mathbb{S} \hookleftarrow \mathbb{S}^{+}$, come è il caso delle strutture (co-)algebriche complesse di coprodotti, come coconi di morfismi indicizzati come “gerarchia ad albero” di colimiti (cfr. §8.2.2), se usiamo la costruzione di Vietoris su insiemi NWF (Abramsky, 2005). In altri termini, è come se la **semantica di un enunciato** inducesse nel sistema logico-computazionale **la sintassi della formula booleana adeguata** ad esprimerla.

- L’ultimo passo per poter giustificare la rappresentazione coalgebrica delle logiche modali in quanto basata sul concetto di **morfismo limitato** (Goranko & Otto, 2007) consiste perciò nell’esplicitare la dualità fra **definizione induttiva (ricorsiva) e coinduttiva (coricorsiva) di insiemi** e quindi quella fra **induzione e coinduzione come metodi di prova,** introdotta prima implicitamente, presentando il processo di **computazione competitiva** coalgebra-algebra come costruzione finitaria di limitazione reciproca (cfr. **Figura 15**).
- Di qui le definizioni duali di induzione e coinduzione come principi per la **definizione di topologie di insiemi parzialmente ordinati** e come **principi di prova** su tali insiemi (Sangiorgi , 2012).

Definizione 13. (Definizione induttiva e coinduttiva di insiemi)

*Per un reticolo completo L i cui punti sono insiemi (come nei reticoli completi ottenuti per costruzione sull'insieme potenza (cfr. sopra **Figura 3**)) e un endofunzione (endomorfismo) F, gli insiemi:*

$$F_{ind} := \bigcap \left\{ x \mid F(x) \leq x \right\} \quad \uparrow \left\{ x \right\}$$

$$F_{coind} := \bigcup \left\{ x \mid x \leq F(x) \right\} \quad \downarrow \left\{ x \right\}$$

*Saranno detti, rispettivamente, "insiemi induttivamente e insiemi coinduttivamente definiti da F"***.** *Di qui due regole di prova come immediatamente derivabili dalla suddetta definizione.*

Definizione 14. (Definizione di induzione e coinduzione come regole di prova)

*Data la **Definizione 13.**, abbiamo le due seguenti regole:*

$$se\ F(x) \leq x\ allora\ F_{ind} \leq x \quad \text{(induzione come principio di prova)}$$

$$se\ x \leq F(x)\ allora\ x \leq F_{coind} \quad \text{(coinduzione come principio di prova)}$$

- Infine, un’ultima fondamentale notazione sul confronto col teorema di Stone. Ciò che differenzia la dualità algebra-coalgebra, dalla **dualità ultrafiltri-ideali massimali** del teorema di Stone, non è solo che la prima è definita su insiemi non-standard e la seconda su insiemi standard, ma soprattutto che in quest’ultima gli insiemi sono **prodotti di processi** induttivi/coinduttivi di definizione nel senso dell’**omotopia topologica (cfr. §8.1.3).**
- In altri termini, la semantica coalgebrica è una semantica in cui la soddisfacibilità delle proposizioni del calcolo logico si decide in termini di **stati accessibili dal sistema fisico** in cui sono realizzati, implementati (una macchina nel caso della TCS, un sistema fisico quantistico nel caso della QFT).
- Ciò spiega perché J.M. Rutten (Rutten, 2000) abbia definito e dimostrato essere la **Coalgebra** la **Teoria Generale dei Sistemi** (dinamici e/o computazionali) interpretati come **sistemi indicizzati di transizione di stato (*labelled state transition system:* LTS).** Il che di nuovo conferma che la logica coalgebrica è la logica appropriata alla **semantica naturalista** propria di RN, come di qualsiasi **ontologia naturalistica.**

- Infatti, come vedremo più specificamente nella Sez. 9, quello che è notevole per un'ontologia naturalista basata sulla dualità algebra (logica) e coalgebra (fisica) è che, nel **formalismo coalgebrico** della QFT per rappresentare sistemi quantistici **dissipativi**, tanto in fisica fondamentale (relativistica delle particelle elementari) quanto in fisica dei materiali (dei sistemi chimici e biologici), il **raddoppio delle algebre** intrinseco ad ogni struttura coalgebrica $A \rightarrow A \times A$ è la struttura fondamentale. Esse, infatti, servono a rappresentare il "raddoppio" del sistema nei due sotto-sistemi, **sistema-bagno termico.**
- I coprodotti (non-commutativi) esprimono matematicamente nei calcoli della QFT il **bilancio energetico fuori dall'equilibrio** (cioè per temperature $T > 0°$) **a somma nulla** fra i due sotto-sistemi. Da esso deriva il **raddoppio dello spazio degli stati** (i cosiddetti "spazi di Fock" del formalismo quantistico): $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \times \tilde{\mathcal{F}}$) e quindi della loro **rappresentazione canonica** (hamiltoniana) in termini di **raddoppio degli spazi di Hilbert**: $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \widetilde{\mathcal{H}}$. Tutte costruzioni, dove i simboli accentati con la tilde $\tilde{\bullet}$ rappresentano sempre il bagno termico.
- Quando vedremo in §9.2 che anche nelle coalgebre della QFT esiste un criterio intrinseco dinamico di selezione degli **stati ammissibili del sistema** e quindi un

criterio dinamico di indicizzazione fra sistemi a crescente complessità, tutto ciò significa che **gli enunciati** φ di una filosofia della natura, in una logica della TC, hanno la loro **semantica** $\tilde{\varphi}$ direttamente negli eventi/processi naturali che descrivono, nella misura in cui i primi sono formalizzati in una logica (modale) booleana, i secondi in una appropriata matematica coalgebrica.

8.2.4. Bicondizionale ontologico e morfismo limitato in TC

- Per i nostri scopi, la **conservazione della verità per inversione di frecce e morfismi** che **l'equivalenza duale** fra asserti in TC giustifica (cfr. 8.1.4), in particolare grazie alla dualità algebra-coalgebra definita su insiemi di Aczel, fornisce certamente l'appropriato ambiente formale in cui giustificare la teoria della dualità fra **necessitazione** (*entailment*) **ontica** e **necessitazione logica**, ovvero la teoria del bicondizionale ontologico come delineata in maniera non formalizzata (o meglio inadeguatamente formalizzata fra implicazione e contro-implicazione "strette" alla fine del cap.4).
- In simboli, data la funzione proposizionale φ del nostro bicondizionale ontologico $\alpha \leftrightarrows \beta$, la sua semantica $[\![\varphi]\!]$ è la seguente:

$$[\![\varphi]\!] := (\alpha \rightleftarrows \beta) \Leftrightarrow [\![(\alpha \in \beta) \xleftarrow[\Omega/\Omega^{op}]{\rightleftarrows} (\alpha \ni \beta)]\!] \Leftrightarrow 1_\varphi,$$

- Dove ($\rightleftarrows$) è **il simbolo del bicondizionale ontologico** fra proposizioni del primo ordine, *α, β* denotanti, in quanto connesse sotto forma di implicazione logica, la causa e l'effetto di un processo naturale (fisico/metafisico); $[\![\ldots]\!]$ è **la condizione necessaria e sufficiente di soddisfacibilità** del bicondizionale, rappresentando ($\alpha\in\beta$) il verso **induttivo** logico-algebrico; ($\alpha \ni\beta$) il verso **coinduttivo** ontico-coalgebrico e "$\xleftarrow{\rightleftarrows}$" il simbolo **dell'invarianza funtoriale della verità** (omo-morfismo controvariante) per l'operazione **di inversione delle frecce e dei mor-fismi** fra componente logica e ontica (fisica/metafisica) del bicondizionale.
- Similmente, quando passiamo alla **semantica modale,** in quanto "naturalmente" definibile su strutture coalgebriche, l'invarianza funtoriale della verità può essere usata, mediante la nozione di **morfismo limitato,** per giustificare **l'equivalenza** fra modelli (mondi possibili) di Kripke – quella che in Logica II avevamo definito

"equivalenza secondaria" generata mediante la relazione euclidea e che caratterizza l'assioma **D** del sistema modale **KD45** (Cfr. Logica II, §14.3.1.7, slide 288ss.; e §14.3.2.1 slide 308ss. sull'interpretazione ontica di **KD45**).

$$\Box_{(n\geq m)}\left(\underbrace{cavallo \in mammifero}_{\text{Verità Logica}} \underbrace{\xleftarrow{\rightleftarrows}}_{\text{morfismo lim.}} \underbrace{cavallo \ni mammifero}_{\text{Verità Ontica}}\right)$$

- ♦ Il **morfismo limitato (*bounded morphism*)** è tale proprio perché limita l'equivalenza a modelli definiti su "mondi possibili" di un medesimo livello *m*, degli infiniti ottenibili "annidando uno dentro l'altro" sistemi **KD45 –** ovvero, insiemisticamente, appartenenti allo stesso livello di "svolgimento" (*unfolding*) di un APG di insiemi non-benfondati illustrato in §8.3.1.
- ♦ Ovviamente, la validità (universalità, necessità) dell'equivalenza non è **assoluta** ma **relativa,** più esattamente **ristretta** (↾) all'insieme di mondi possibili accessibili dal livello *m* in poi, come l'indicizzazione $(n \geq m)$dell'operatore di **necessità** $\Box$ e/o del connesso **quantificatore universale** ∀, evidenzia.
- ♦ In altri termini, ogni livello *m* di "svolgimento" coalgebrico di insiemi può diventare una radice di un ulteriore grafico APG di livello *n* > *m*, ovvero di un'ulteriore

struttura di Kripke di mondi possibili (nel nostro esempio di “razze” di cavalli (sauri, pony, etc.), per cui tutti vale la loro appartenenza/coappartenenza alla classe/genere dei mammiferi.

- È in questo senso che parliamo di “struttura annidata” di sistemi modali **KD45,** come illustrato nella Parte IV dedicata alla illustrazione della nostra ontologia formale del RN.
- Possiamo allora passare alla definizione di **morfismo limitato** (Goranko & Otto 2007, p.259):

Definizione 15. (Morfismo limitato fra modelli di Kripke)

Siano $\mathfrak{M} = \langle W,R,Vp \rangle$ *e* $\mathfrak{M}' = \langle W',R',V'p' \rangle$ *dei modelli di Kripke, ovvero due strutture (frame) definite da due insiemi di mondi possibili* $\langle W, W' \rangle$*, una relazione di accessibilità fra mondi per ciascuna struttura* $\langle R, R' \rangle$ *e una coppia di funzioni di valutazione (0,1) V, V’ su proposizioni p, p’ per ciascuna struttura, che fa di ciascun mondo possibile W, W’ un “modello”* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ *ovvero un dominio di oggetti (stati) su cui interpretare le relative proposizioni. Una funzione* $\rho : W \rightarrow W'$ *è un “morfismo limitato” da* $\mathfrak{M}$ *a* $\mathfrak{M}'$ *se il suo grafo è una* ***bisimulazione*** *(cfr. §8.2.3.4) fra* $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$. *Denoteremo il morfismo limitato* $\rho : \mathfrak{M} \xrightarrow{\rightleftarrows} \mathfrak{M}'$.

- È significativo per noi confrontare questa **logica algebrica del primo ordine** su insiemi non-benfondati della semantica modale di Kripke, in cui si quantifica sugli stati possibili *x,y* dell'universo della teoria, con quella esposta nel corso di Logica II (cfr. Parte IV, §14.3.1.2). Essa, seguendo (Galvan, 1991) e la sua ontologia platonica sui fondamenti della logica e della matematica e quindi una teoria standard degli insiemi definiva la semantica delle **interpretazioni** o **valutazioni** V di Kripke sul **prodotto cartesiano** dell'insieme delle variabili proposizionali P per l'insieme (totalità) dei mondi possibili W di un intero universo, cioè $V: P \times W \rightarrow \{1,0\}$. È dunque una semantica del **secondo ordine,** visto che si quantifica sulle valutazioni semantiche delle variabili proposizionali**.**
- È chiaro che questa semantica, sebbene perfettamente consistente, non ammette **restrizioni** su mondi possibili **ammissibili** (e la relativa indicizzazione di quantificatori e operatori modali) e quindi ammette solo verità **assolute** e non **relative –** sebbene sempre **universali** – come nel caso dell'interpretazione coalgebrica, basata sui coprodotti e non sui prodotti.
- Una logica difficilmente compatibile con una visione evolutiva del cosmo e delle sue leggi, o in generale con la modellizzazione di **strutture complesse** nelle

scienze naturali, biologiche innanzitutto, ma anche in quelle sociali o economiche (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2020).

- In questo contesto, è ancora significativo ricordare che, grazie a questa semantica coalgebrica, è possibile ottenere anche **una dimostrazione di completezza** della semantica relazionale di Kripke in logica modale e delle sue successioni potenzialmente illimitate, e attualmente limitate di inclusioni di modelli (Cfr. (Venema 2007)).
- Nel contesto di questo enorme arricchimento che la logica e la matematica della TC consente sia nelle scienze che nella filosofia giova citare questo passo conclusivo del saggio di Goranko e Otto più volte citato (Goranko & Otto, 2007, p. 323).
  - «In sintesi, la logica modale ha (almeno) due emblematiche caratteristiche (…): 1. **La logica modale è locale.** La verità di una formula è valutata allo stato corrente (mondo possibile): questa localizzazione è preservata (e trasmessa) lungo i percorsi delle relazioni di accessibilità per mezzo della quantificazione corrispondente agli operatori modali. Questa caratteristica è riflessa dalla nozione di **bisimulazione** fra stati e strutture di Kripke, rispettivamente (…).

2. **La logica modale è multi-strato.** Sulle strutture di Kripke (al prim'ordine) il linguaggio modale è una variabile legata, un frammento garantito (*guarded*) della logica del primo ordine, mentre sulle strutture di Kripke (al second'ordine) causa la quantificazione universale sulle valutazioni V essa diventa un frammento della logica universale monadica del second'ordine. Ognuno di questi due strati semantici porta alla sua propria agenda e al suo proprio sviluppo di teoria dei modelli».

9. Le coalgebre in fisica fondamentale

9.1. Dalla QM alla QFT termica in fisica fondamentale

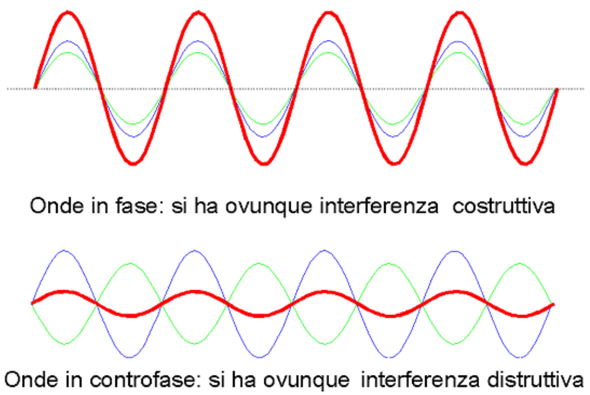
- Come sappiamo, a causa del **principio di indeterminazione** le cosiddette “variabili canoniche” **posizione *q* e quantità di moto (energia) *p*** che definiscono lo stato di quiete o di moto di un sistema fisico in meccanica **non commutano** ovvero non sono **variabili indipendenti** fra di loro, in quanto la misurazione dell’una influisce su quella dell’altra.
- Ciò significa che non è possibile rappresentare geometricamente lo **spazio degli stati (o delle fasi)** per rappresentare **l’evoluzione nel tempo (traiettoria)** di un sistema dinamico di cui p e q costituiscono le dimensioni ortogonali x, y e che possono appunto commutare fra di loro senza che la rappresentazione cambi.
- Il formalismo matematico **statistico** della fisica quantistica è basato sulla fondamentale scoperta di D. Hilbert intorno agli anni ’20 del secolo scorso secondo la quale le **distribuzioni di probabilità** (= funzioni d’onda statistiche) delle cosiddette **variabili canoniche** della meccanica classica, *posizione* x e *quantità di moto*

(energia) p, che di per sé **non commutano** fra di loro, causa il principio d'indeterminazione di Heisenberg, **commutano ognuno con la trasformata di Fourier dell'altra (cfr. §7.3.1 e Figura 2).**

- Di qui la definizione della nozione di **relazione di commutazione canonica (*canonical commutation relation:* CCR) in fisica quantistica:** $[p, x_p] = i\hbar$**,** dove i è **l'unità immaginaria** (la trasformata di Fourier è definita sui numeri complessi, cioè con una parte reale e una immaginaria) e $\hbar$ è **la costante di Planck**, laddove in meccanica classica e statistica la stessa relazione è $[p, x] = 1$.
- Siffatta commutatività consente di definire in fisica quantistica un particolare spazio degli stati (o delle fasi) definito sui numeri complessi: il cosiddetto **spazio di Hilbert.**
- A questo punto occorre fare una fermata per riflettere sul fatto che la trasformata di Fourier può applicarsi tanto a **funzioni d'onda** che sono oscillazioni **fisiche** (p.es., meccaniche come nel caso dei suoni) quanto oscillazioni **statistiche** (p.es., quelli della funzione d'onda di Schrödinger). Essa in MQ con i suoi **autovalori** definisce le aspettative statistiche, p.es., della posizione degli elettroni a diversi

livelli discreti di energia diversi dallo stato **fondamentale** se “eccitato” da un input esterno attorno al nucleo di un atomo.

- Quello che è significativo è che la forma d’onda è quella di una cosiddetta **onda stazionaria circoscritta,** ottenuta come interferenza fra due onde **in fase** che si propagano in direzione contraria, se impediamo che la propagazione si sviluppi nello spazio così da obbligarla a oscillare nel tempo.
- In una parola, quella che in meccanica si ottiene se pizzichiamo la corda fissata fra i due ponticelli di una chitarra o di un violino. Il numero delle oscillazioni (massimi e minimi della funzione d’onda) cioè la **frequenza** sarà dunque proporzionale all’intensità della forza con cui pizzichiamo la corda.
- La funzione d’onda di Schrödinger, sebbene definita da una formula molto complessa, è dunque una **funzione lineare dell’energia** e mi indicherà con una precisione impressionante la frequenza statistica e dunque la probabilità di trovare l’elettrone in un determinato livello energetico (“orbitale”) intorno al nucleo.



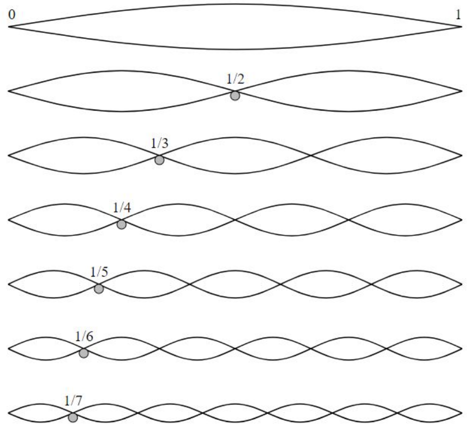


Figura 17. (Sinistra) interferenza costruttiva (onde con la medesima frequenza si sommano, ovvero aumenta l'ampiezza) e distruttiva (se in controfase si annullano). Destra onda stazionaria circoscritta risultante dall'interferenza di due onde in fase che si propagano in direzioni opposte, dove la frequenza (1, 1/2, 1/3, …) è proporzionale all'intensità (1, 2, 3,…) dell'energia.

- ♦ Effettivamente, la frequenza 1 in figura corrisponde al livello 0 di un input energetico dall'esterno, ovvero alla massima probabilità =1 dello stato di equilibrio del sistema in meccanica statistica. Nel caso dell'atomo di idrogeno, esso corrisponde allo **stato fondamentale dell'atomo** quello in cui l'elettrone occupa un unico "orbitale" intorno al nucleo costituito da un unico protone.

- Il famoso esperimento dell'invio di un flusso di elettroni (ma vale anche per le molecole anche molto grandi) attraverso due fessure che dà luogo a una **figura diffrazione** "a strisce" come se invece che particelle fossero onde a interferire costruttivamente (striscia luminosa = max probabilità) e distruttivamente (striscia nera = min probabilità) evidenzia la **dualità particella-onda** che è alla base della MQ. Se fossero particelle classiche, infatti, gli elettroni dovrebbero trovarsi in maniera omogenea ovunque sullo schermo come le particelle di vapore su un vetro (=condensa).

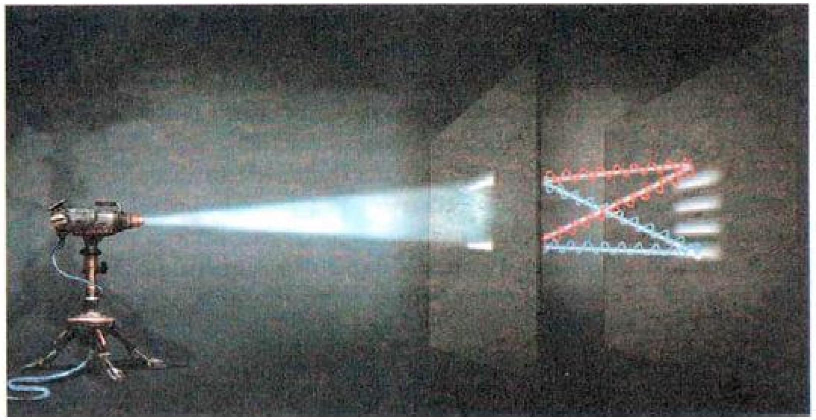


Figura 18. Rappresentazione intuitiva dell'esperimento a doppia fessura con interferenze distruttiva (rossa) e costruttiva (blu) delle funzioni d'onda.

♦ Il principio di interferenza costruttiva/distruttiva fra *n* onde esemplifica anche il concetto di **sovrapposizione di stati** fondamentale in QFT. Se supponiamo che per ogni particella esista la sua funzione d'onda, in un **medesimo stato quantico** possono sovrapporsi le funzioni d'onda di (lo stato può essere occupato da) ***n* particelle** anche allo **stato fondamentale** (cfr. livello 0 di energia **Figura 17**) che allora in questo formalismo corrisponde allo **stato di equilibrio** della meccanica statistica.

- Grazie al principio di sovrapposizione diventa perciò possibile rappresentare in questo approccio statistico della QM anche la QFT che, di per sé, se interpretato come una **dinamica a molti corpi,** dovrebbe riferirsi
- In QM e nella QFT basata sulla meccanica statistica (quindi con lo **stato fondamentale all'equilibrio** ovvero per $T = 0°$, cfr. in), infatti, è possibile modellizzare solo sistemi aperti **stabili in condizioni vicine all'equilibrio** usando la condizione asintotica tipica della meccanica statistica (Hollands & Longo, 2018), e non sistemi aperti **stabili fuori dall'equilibrio (**quindi con $T > 0°$) quali sono i sistemi quantistici dissipativi. Nella QFT di questi sistemi lo stato fondamentale dei **campi quantistici interagenti** è infatti dato dal **bilancio energetico a somma nulla** fra sistema e ambiente (bagno termico).
- Di qui l'importanza della **QFT termica** che consente una **modellizzazione coalgebrica** dei sistemi quantistici come **sistemi dissipativi** perché sistemi aperti alle fluttuazioni del vuoto quantistico (QV), che non è possibile in linea di principio usando le nozioni di **meccanica statistica** nell'interpretazione della termodinamica quantistica tipica della QM.

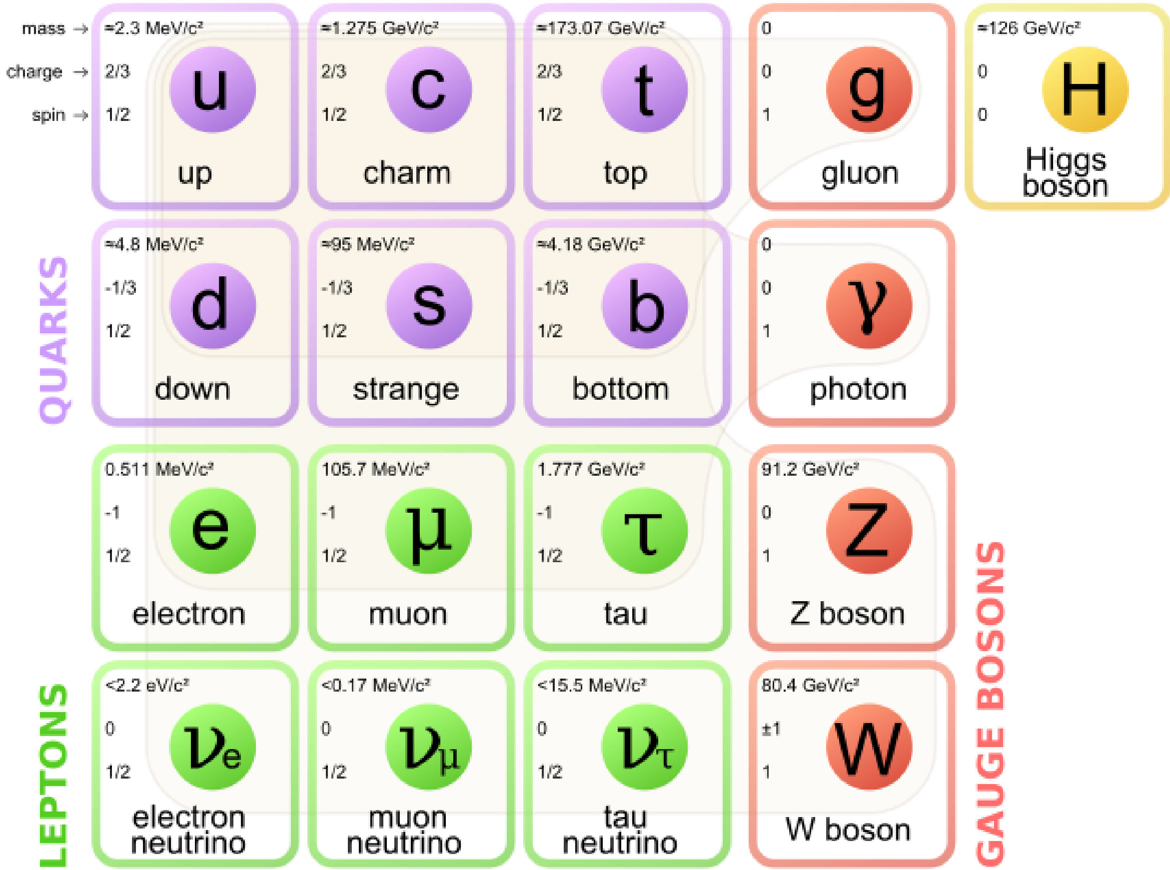
- ♦ Per tali sistemi, caratterizzati dal fatto che il sistema passa continuamente **attraverso diverse fasi**, occorre fare riferimento alla **modellizzazione coalgebrica di tali sistemi** tipica della QFT termica (Blasone, Jizba, & Vitiello, 2011; Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017), interpretata cioè secondo i termini della **teoria dinamica dei campi termici (*thermal field dynamics,*** TFD**)** introdotta negli anni ’80-‘90 dello scorso secolo dal fisico giapponese Hiroomi Umezawa (Umezawa, 1993; 1995). La TFD e la QFT termica sono infatti distinte dalla meccanica statistica e dalla MQ che, studiando **i sistemi all’equilibrio termodinamico,** necessariamente studia il sistema **in una sola fase**.
- ♦ Infatti, nella QFT basata sulla meccanica statistica le **inevitabili fluttuazioni** attorno allo 0° dello stato fondamentale (stato di vuoto $|0\rangle$) dei campi sono interpretate **statisticamente** per il principio d’indeterminazione. Viceversa, nella QFT termica è essenziale la relazione coll’interpretazione del **vuoto quantistico $|0\rangle$** (VQ) data alla luce del **III Principio della Termodinamica** grazie alla quale nessun sistema fisico può essere **realisticamente** rappresentato come **isolato**.

- ♦ Nella TFD e nella QFT termica nozione di VQ è, infatti, l'unica possibile spiegazione a livello fondamentale, microscopico, del **Terzo Principio della Termodinamica**, in genere formulato come segue: "l'entropia di un sistema si avvicina ad un valore costante nella misura in cui la temperatura si approssima allo zero".
- ♦ Di fatto fu il chimico Walter Nernst, per questo insignito del Premio Nobel nel 1921, a scoprire che per una data mole di materia – effettivamente un insieme di un numero di Avogadro di molecole o di atomi – per temperature assolute vicine allo 0 assoluto in gradi Kelvin (-273°C), T_0, se la connessa variazione di entropia ΔS non raggiungesse un valore costante, acquisirebbe un valore infinito (si dividerebbe per 0). Ciò significa, in pratica che la temperatura di qualsiasi sistema fisico **non raggiungerà mai lo zero assoluto.**
- ♦ Ciò significa però che **vi è una non-corrispondenza fra la variazione del contenuto di energia di un corpo e il supplemento di energia dall'esterno**. Da dove prenderà infatti il sistema l'energia perché le sue particelle possano continuare a oscillare indefinitamente e quindi il sistema avere una temperatura $T > 0°K$?

- ♦ Possiamo evitare questo paradosso se si suppone che questa misteriosa sorgente “onnipresente” di energia sia **il vuoto** – di qui il concetto di “energia del vuoto”, sebbene il suo simbolo $|0\rangle$ indichi che nessuna particella occupi quello stato.
- ♦ Esiste cioè un’inevitabile fluttuazione della materia – a qualsiasi livello microscopico o macroscopico ci poniamo –, così che lo 0°K (-273°C) assoluto non possa essere mai raggiunto.
- ♦ **La conclusione è che di per sé *non possiamo più concepire alcun corpo fisico come isolato nel vuoto meccanico*** secondo il paradigma meccanicista della meccanica classica (newtoniana) e statistica (mediante la condizione asintotica), in quanto ogni sistema a livello fondamentale sarà **aperto** alle inevitabili fluttuazioni del VQ.
- ♦ In altri termini,
  “Il VQ diviene un ponte che connette fra di loro tutti gli oggetti. Non può esistere alcun corpo isolato, così che l’attore fondamentale in fisica non è più la particella, ma il campo, cioè le distribuzioni nello spazio di particelle che variano nel tempo. Le particelle divengono “i quanti” di questo campo di materia, allo stesso

modo che i fotoni sono i quanti del campo elettromagnetico" (Del Giudice, Pulselli, & Tiezzi, 2009).

- Insomma, non esiste più come nel quadro del Modello Standard la distinzione meccanicista fra **particelle** (fermioni: quark, elettroni, neutroni) e **quanti di campi delle forze d'interazione** (bosoni di gauge delle tre forze fondamentali: elettromagnetica, forte e debole).



♦ In QFT esistono solo **1) campi di forze materiali con i loro quanti (fermioni)** e **2) campi di forze d'interazione con i loro quanti (bosoni di gauge).**

- ♦ Questa lettura della QFT, però, si scontra con l'evidenza che in QFT **non vale** il classico **teorema di Stone-Von Neumann** (Von Neumann, 1955), dimostrato nel 1931 e di cinque anni precedente al teorema di Stone di rappresentazione per le algebre di Boole (§7.4.2), che è invece alla base della QM. Il legame teoretico fra i due teoremi è che le topologie comuni ai due teoremi **sono le stesse** come verrà dimostrato più tardi, così da dar inizio all'**interpretazione topologiche** sia della fisica quantistica che della computazione quantistica, come abbiamo visto.
- ♦ Il teorema di Stone-Von Neumann della QM afferma, infatti, che, per sistemi con **un numero finito di gradi di libertà** (= le dimensioni dello spazio di rappresentazione della sua modellizzazione) il che è sempre vero per sistemi della QM in quanto **sistemi chiusi** rappresentabili in una **sola fase**, le rappresentazioni delle **relazioni di commutazione canoniche** sono tutte ***unitariamente equivalenti l'una rispetto all'altra**,* così da giustificare l'uso esclusivo dell'informazione di Shannon nella QM – le differenze fra elementi equivalenti possono essere solo sintattiche, mai semantiche.
- ♦ Viceversa (Blasone, Jizba, & Vitiello, 2011), nei sistemi della **QFT i gradi di libertà non possono essere finiti** (Haag, 1955) perché il sistema **può passare per**

infinite transizioni di fase, “quindi esistono **infinite rappresentazioni in spazi di Hilbert non-equivalenti** delle relazioni canoniche di commutazione (bosoni) e di anti-commutazione (fermioni)”.

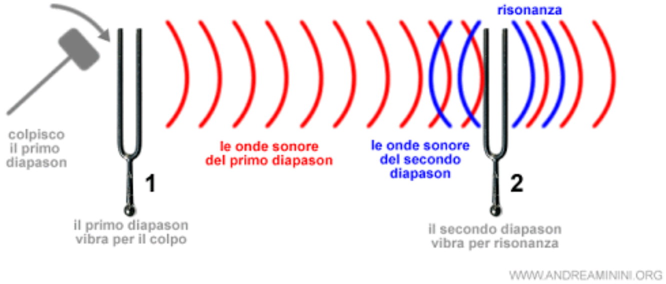
- Esse corrispondono ad altrettante **possibili infinite rotture spontanee di simmetria (RSS) del QV,** come il teorema di Goldstone – uno dei pilastri della QM e della QFT – ha dimostrato (Goldstone, 1961).
- Infatti, attraverso il principio della RSS nello stato fondamentale del QV esistono **infinite (non-numerabili) condizioni di VQ**, tutte compatibili con lo stato fondamentale stesso. Inoltre, questo non vale solo nel **dominio relativistico** (**microscopico**) della fisica subatomica e subnucleare, ma anche si applica al dominio **non-relativistico dei sistemi a molti corpi** della materia condensata, quindi nel **dominio mesoscopico** e **macroscopico** dei sistemi chimici e biologici, fino alle scale del dominio **megaloscopico** della dinamica delle galassie e dei sistemi cosmologici.
- Infatti, a partire dalla scoperta, negli anni ’60 del secolo scorso, delle **correlazioni a lungo raggio**, generate dinamicamente e mediate dai cosiddetti **bosoni di Nambu-Goldstone** (NG), e quindi del loro ruolo nelle cosiddette **teorie di gauge**,

ovvero delle teorie delle tre forze fondamentali del Modello Standard e dei loro **bosoni di gauge** (fotoni, gluoni e *W-Z*) grazie al “campo di Higgs” (Goldstone, Salam, & Weinberg, 1962), la scoperta di questi **modi collettivi, o domini di coerenza di fase** dei campi di forza e dei loro quanti (particelle), ha cambiato profondamente il quadro di riferimento della fisica fondamentale.

- Tutte le teorie di **grande unificazione**, da quella della **forza elettro-debole** (Goldstone, Salam, & Weinberg, 1962), a quella recentissima che include anche la **forza forte**, grazie alla conferma sperimentale del “bosone di Higgs” – scoperte costellate dalla concessione di un numero impressionante di Premi Nobel della fisica negli ultimi trenta anni –, hanno nella QFT e nei “condensati” (= densità definita), identificata da un numero $\mathcal{N}$ di bosoni NG, che **caratterizzano univocamente un dominio di coerenza di fase**, la loro chiave di volta.
- Siccome i bosoni NG **non sono bosoni di gauge**, cioè quanti di un’ulteriore forza fondamentale, quanti di energia, ma quanti **dei modi coerenti di essere in fase** di tutti i campi di forza materiali e d’interazione della QFT – infatti essi **svaniscono senza residui,** senza violare il I Principio, quando si rompe il dominio di coerenza di fase che essi ordinano – essi possono essere definiti **“quanti di forma”** e

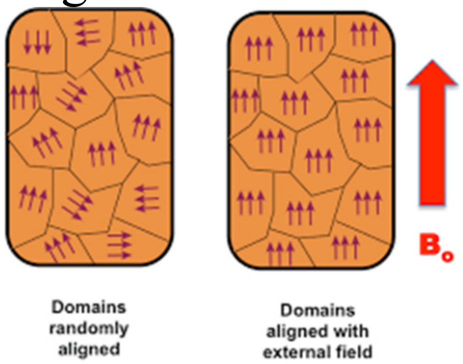
non di “materia” così da confermare la **nuova visione duale della natura** legata alla QFT.

- I bosoni NG prendono nomi diversi a seconda delle diverse coerenze di fase che essi controllano in fisica della materia condensata. Si chiameranno, per esempio, **fononi (*phonons*)** nella fisica dei fluidi e/o dello stato solido dove le coerenze di fase sono nei campi della **forza meccanica** (oscillazioni di molecole, come nel classico caso delle risonanze sonore, da cui il nome).



- La rottura di simmetria è quella sferica di Galilei-Newton per la forza meccanica da cui dipende lo **stato liquido (=rottura longitudinale),** o lo **stato solido (rottura longitudinale e trasversale).**
- Si chiameranno **magnoni** nel caso delle coerenze di fase dei campi magnetici dove la transizione di fase dallo stato non-magnetico allo stato magnetico dipende

dalla rottura della simmetria sferica dei **vettori di magnetizzazione** dei campi di dipolo **magnetico**. Vettori di magnetizzazione orientati in qualsiasi direzione: stato non-magnetico. Vettori magnetizzati in un'unica direzione: stato magnetico.



- Nel caso della materia organica e dell'acqua, in cui soltanto le biomolecole sono attive, i bosoni NG si chiameranno **polaroni** perché la rottura di simmetria sferica è quella dei campi di dipolo **elettrico** tipici delle biomolecole e delle molecole d'acqua. Campi che costituiscono la portante delle coerenze di fase da cui dipende la **struttura fine** della formazione di strutture biologiche a diversi livelli di complessità, nonché **l'ordinamento della serie di reazioni chimiche** e dei complessi **meccanismi di autoregolazione** che costituiscono le **diverse funzioni biologiche,** dal genoma in su.

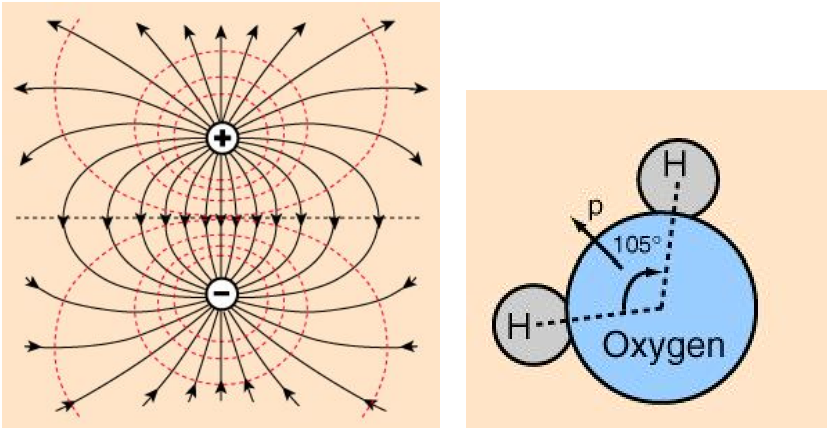


Figura 19. Campo di dipolo (in nero) perpendicolare a quello elettrico e struttura della molecola d'acqua da cui il suo campo di dipolo dipende

♦ **In sintesi,** la più evidente differenza fra QM e QFT è così l'interpretazione fisica differente della **dualità particella-onda** derivante dal principio di indeterminazione che caratterizza la fisica quantistica. Mentre, dunque, il principio di indeterminazione in QM si enuncia come:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

- Dove *x,* nell'esempio classico in QM dell'elettrone nell'atomo, è la posizione e *p* è la quantità di moto della particella, e $\hbar$ è la costante di Planck normalizzata sulla circonferenza. Nella QFT, invece, la stessa relazione si legge come:

$$\Delta n \Delta \varphi \geq \hbar$$

- Dove *n* è il numero di quanti del campo di forza e φ è la *fase* del campo. Se ($\Delta n = 0$), φ è indefinita, così che ha senso non considerare la forma d'onda in favore del comportamento individuale tipo-particella. Al contrario, se ($\Delta\varphi = 0$), *n* è indefinito perché un numero estremamente alto di particelle sta oscillando insieme con una fase ben definita, cioè all'interno di un dato dominio di .
- In questo caso, sarebbe un non-senso descrivere il fenomeno nei termini di comportamento di particelle individuali, poiché prevalgono i modi collettivi del campo di forze.
- Insomma, nella QM l'incertezza, e quindi la dualità particella-onda è **fra due rappresentazioni statistiche**, tipo-particella e tipo-onda, perché viene concepita come dipendente da insuperabili limitazioni del processo di misura, p.es., nel caso classico dell'elettrone nell'atomo, fra posizione *x* e quantità di moto *p*.

- ♦ Al contrario, in QFT **la dualità è fra due entità dinamiche:** i campi e le particelle quantistiche associate a quei campi che sono semplicemente i quanti di quel campo.
- ♦ In tal modo, **l'*entanglement*** quantistico non implica alcuna strana o misteriosa relazione fra particelle, come nelle false divulgazioni della QM.
- ♦ Esso è semplicemente espressione del **carattere unitario di uno stato coerente (coerenza di fase) di un campo di forze**.
- ♦ In altri termini, per usare un'espressione del fisico italiano Marcello Cini, la funzione d'onda di Schrödinger non è altro che "una **copertura statistica** (*statistical blanket*) di una struttura molto più fine della natura dinamica della realtà".
- ♦ Il fatto che noi viviamo in un **mondo dinamicamente continuo** spiega intuitivamente perché in QFT si usa un formalismo **topologico** per rappresentare la dinamica dei sistemi quantistici.
- ♦ Cfr. il famoso "nastro di Möbius" di **Figura 4** che è un tipico esempio di struttura topologica. Non per nulla il cosiddetto "gruppo di Möbius" ha un ruolo fondamentale nei calcoli algebrici della QFT e della QM.

- ♦ Pensiamo intuitivamente, per esempio, alla **curvatura di uno spazio piatto:** essa cambia simultaneamente tutti gli angoli e quindi le proprietà delle figure geometriche definite su di esso, senza bisogno di inviare alcun segnale fra di loro. E' questa la modellizzazione matematica di ciò che abbiamo definito il **comportamento collettivo o *entanglement*,** come costituenti un'unica realtà delle particelle della QFT intese come quanti dei relativi campi di forza nella misura in cui fanno parte di **un unico dominio di coerenza di fase,** ontologicamente, "essere il dominio di un unico predicato" (p.es., "essere ferro magnete", "essere superconduttore", o nel caso delle transizioni di fase in cui tutte le reazioni chimiche consistono "essere NaCL (sale da cucina)" e non più "essere sodio (Na)" o "essere cloro (Cl)" individualmente, etc.
- ♦ Ciò sarà verificato dal fatto che vedremo subito che il formalismo matematico della QFT termica è basato sulle **coalgebre** in quanto la loro struttura di **raddoppio delle algebre:** $A \rightarrow A \times A$ e dei **coprodotti** come somme che esprimono naturalmente la nozione di **bilancio energetico a somma nulla** per $T > 0°$ fra sistema e bagno termico che corrispondono ad altrettanti **stati degeneri del VQ** come al-

trettante **coerenze di fase** univocamente **indicizzate dal numero $\mathcal{N}$** del condensato di bosoni di NG che le controllano e che ne fanno le basi quantistiche di sistemi di materia condensata **a complessità crescente** (cfr. il concetto di **foliazione del vuoto** (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017)), permettono la loro **modellizzazione logico-computazionale** in TC nei termini di **colimiti** (coconi di morfismi: cfr. §8.2.2), visto che grazie all'indicizzazione attraverso $\mathcal{N}$ esiste un **funtore diagonale** unico per questa categoria particolare di coprodotti.

- Ciò significa è che quando dicevamo prima che mediante il meccanismo della RSS è "come se" la natura stessa definisse il **dominio di una funzione/predicato,** p.es., essere magnete, ciò è molto più di una metafora. Può essere formalizzato in **un calcolo logico universale e ben definito**.
- Si vede immediatamente dunque come la QFT costituisce la base fisica per una **ontologia del realismo naturale aristotelico, anti-meccanicista** ovvero sulla distinzione in fisica fra **moto locale di particelle** (*kynesis*) e **trasformazione** (*metabolé*) di **proprietà** (accidentali) e/o di **natura** (sostanziali), ambedue modellizzate come transizioni di fase di campi quantistici.

- A ogni *metabolé* corrisponde infatti nell’ontologia aristotelica **l’eduzione**, dal sostrato del dinamismo primario della materia, di una nuova **forma sostanziale o accidentale**.
- Proprio come in QFT ad ogni dominio di coerenza di fase dei campi quantistici corrisponde una RSS del QV, ovvero l’emergenza di un nuovo **ordinamento della materia** (“forma materiale” nel linguaggio aristotelico).

9.2. Modellizzazione coalgebrica della QFT termica

- Per i nostri scopi, ciò che è qui fondamentale sottolineare è il cambio richiesto dalla QFT termica nella **formalizzazione matematica** dei sistemi quantistici, nell’ambito di questa interpretazione topologica dei sistemi quantistici, comune anche alla QM.
- Generalmente, lo strumento algebrico fondamentale per effettuare i calcoli su un reticolo di **numeri quantici** relativi alle variabili che caratterizzano il sistema, sia in QM che in QFT, sono le cosiddette **algebre di Hopf.**
- Effettivamente un’algebra di Hopf è una **bialgebra** composta da un **algebra** $H \times H \rightarrow H$ (usata per esempio per calcolare l’energia di una singola particella), e

da una **coalgebra** $H \rightarrow H \times H$ (usata per calcolare l'energia totale delle particelle in un singolo stato quantico). Queste due metà della bialgebra sono perfettamente **isomorfe**, e legate da una mappa lineare K. Poiché sia le coppie di **prodotti** (algebra) che di **co-prodotti** (coalgebra) **commutano fra di loro** è evidente che sono **covarianti**. → Le algebre di Hopf sono dunque **autoduali:** se mappo un'algebra di Hopf su se stessa ottengo una nuova algebra di Hopf.

$$
\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S\otimes \mathrm{id}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "\nabla"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & K \arrow[rr, "\eta"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes S"'] & & H \otimes H \arrow[ur, "\nabla"'] &
\end{tikzcd}
$$

♦ Naturalmente nel caso dei sistemi della QFT termica **non ha senso di parlare di commutatività dei co-prodotti**. L'energia totale, in questo caso di sistema aperto agli scambi con l'ambiente (sistema dissipativo) è data dalla somma 0 fra causa il **bilancio energetico** (I Principio della Termodinamica) fra uno stato del sistema e dello stato del suo bagno termico **e i due non possono essere commutati fra di loro**, perché non sono definibili sulla stessa base.

- ♦ Nel caso dei coprodotti, invece, di due particelle sovrapposte in un medesimo stato quantico della QM, la commutatività è garantita dalla loro indistinguibilità per il principio d'indeterminazione.
- ♦ Questo significa rompere la simmetria sferica della bialgebra di Hopf, così che si parlerà di **algebre di Hopf *q*-deformate**, dove q è un parametro termico legato alla cosiddetta **trasformata di Bogoliubov** che entra in qualsiasi processo di creazione-annihilazione di particelle dal QV.
- ♦ In questo senso una modellizzazione di tipo coalgebrico potrebbe bastare a rappresentare un sistema dissipativo. Tuttavia, poiché **bisogna soddisfare la canonicità,** ovvero **il carattere Hamiltoniano "chiuso"** di un sistema dinamico dal **raddoppio delle algebre,** che caratterizza ogni coalgebra $H \rightarrow H \times H$ ovvero:

1. **Raddoppiare gli stati dello spazio di Hilbert** perché a ogni stato del sistema **corrisponde specularmente** (ovvero con un'inversione della freccia-energia

per soddisfare il bilancio energetico) **uno stato del bagno termico.** E' il cosiddetto principio del **raddoppio dei gradi di libertà del sistema (*doubling of degrees of freedom* (DDF)).**

2. **Raddoppiare ogni coalgebra *q*-deformata di Hopf** con la sua **dualmente omomorfa algebra *q*-deformata di Hopf,** per l'applicazione controvariante di un medesimo mapping fra le due strutture, la trasformata di Bogoliubov (Blasone, Jizba, & Vitiello, 2011; Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017)**.** In simboli: $q\text{-}HCoalgT \rightleftharpoons q\text{-}HAlgT^*$ per ogni singolo sistema

9.3. Conseguenze per i fondamenti della fisica quantistica, della computazione quantistica e per la loro ontologia

♦ Innanzitutto, il principio della DDF opera un'incredibile semplificazione dei calcoli quantistici. Infatti:

1. **È la dinamica stessa**, non l'osservatore, che, col raddoppio, **opera la scelta dell'appropriata base ortonomale** dello spazio di Hilbert per rappresentare adeguatamente (veritativamente) il sistema.

2. **Conseguentemente** nei calcoli su matrice associati, p.es., per la definizione dei valori di determinate proprietà del sistema a temperature finite tutti i valori numerici sono **valori interi.** La determinante della **matrice di Pauli** risultante sarà dunque **perfettamente calcolabile** essendo una “delta di Krönecker” e non una “delta di Dirac” com’era nella QFT non-termica, con il problema degli infiniti ad essa associati.
3. **D’altra parte,** siccome tutte le coalgebre della QFT termica sono caratterizzate da un unico endofuntore, la trasformata di Bogoliubov *T*, ed ogni colagebra – e il relativo “foglio” del QV, in base al principio della “foliazione del QV” – è **univocamente identificata da un valore definito del parametro di deformazione *q*** intrinsecamente associato a *T*, *T* stesso assume la funzione di “funtore diagonale” perché mappa in associazione a un determinato *q* ogni coalgebra in un’unica **coalgebra finale** in base al Teorema di Aczel, l’insieme delle coalgebre *q*-deformate di Hopf della QFT termica costituisce un’**unica categoria come la sua duale,** per l’applicazione controvariante del medesimo endofuntore *T*. In simboli: ***q*-HCoalgT** $\rightleftharpoons$ ***q*-HAlgT*.**

4. **Finalmente,** poiché la categoria ***q*-HCoalgT** costituisce una coalgebra finale, e soprattutto gli spazi topologici associate a queste strutture sono gli stessi del Teorema di Stone è possibile associare anche a questa categoria di coalgebre la dualità equivalente con la categoria delle algebre di Boole, secondo la relazione che già conosciamo: **SCoalgT** $\rightleftharpoons$ **BAlgT***. In altri termini, i sistemi della QFT termica modellizzati coalgebricamente costituiscono una nuova classe di computer quantistici basati **sull'universalità coalgebrica** (Rutten, 2000). Con il non piccolo vantaggio del valore semantico del loro qubit "semantico", visto che per il meccanismo del "raddoppio dei gradi di libertà" esso commuta 0/1 solo quando il sistema "è in fase" col suo ambiente (Basti, Capolupo, & Vitiello, 2017). Ciò spiega perché anche il nostro cervello e la sua memoria dinamica (*deep learning*) funzionano sui principi della QFT termica, come dimostrato in decine di studi (Cfr. per una sintesi (Freeman & Vitiello, 2008; Capolupo, Freeman, & Vitiello, 2013).

10. Bibliografia di questa parte

Abramsky, S. (2005). A Cook's Tour of the Finitary Non-Well-Founded Sets (original lecture: 1988). In S. Artemov, H. Barringer, A. d'Avila, L. C. Lamb, & J. Woods (Eds.), *Essays in honor of Dov Gabbay. Vol. I* (pp. 1-18). London: Imperial College Pubblications.

Abramsky, S., & Tzevelekos, N. (2011). Introduction to categories and categorical logic. In B. Coecke (Ed.), *New structures for physics. Lecture Notes in Physics, vol. 813* (pp. 3-94). Berlin-New York: Springer.

Aczel, P. (1988). Non-Wellfounded Sets. *CLSI Lecture Notes, vol.14*.

Awodey, S. (2010). *Category Theory. Second Edition (Oxford Logic Guides 52).* Oxford, UK: Oxford UP.

Basti, G., Capolupo, A., & Vitiello, G. (2017). Quantum Field Theory and Coalgebraic Logic in Theoretical Computer Science. *Prog. in Bioph. & Mol. Biol. Special Issue: Quantum information models in biology: from molecular biology to cognition, 123*(In Press). Retrieved from preprint on https://arxiv.org/pdf/1701.00527.pdf

Blackburn, P., De Rijke, M., & Venema, Y. (2002). *Modal logic. Cambridge tracts in theoretical computer science.* Cambridge, UK: Cambridge UP.

Blasone, M., Jizba, P., & Vitiello, G. (2011). *Quantum field theory and its macroscopic manifestations. Boson condensation, ordered patterns and topological defects.* London: Imperial College Press.

Capolupo, A., Freeman, W. J., & Vitiello, G. (2013). Dissipation of dark energy by cortex in knowledge retrieval. *Physics of life reviews, This Issue*.

Cocchiarella, N. B., & Freund, M. A. (2008). *Modal logic. An introduction to its syntax and semantics.* Oxford UK: Oxford UP.

Del Giudice, E., Pulselli, R., & Tiezzi, E. (2009). Thermodynamics of irreversible processes and quantum field theory: an interplay for understanding of ecosystem dynamics. *Ecological Modelling, 220*, 1874-1879.

Freeman, W. J., & Vitiello, G. (2006). Nonlinear brain dynamics as macroscopic manifestation of underlying many-body field dynamics. *Physics of Life Reviews, 3*(2), 93-118.

Freeman, W. J., & Vitiello, G. (2008). Dissipation and spontaneous symmetry breaking in brain dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41*(30), 304042. doi:10.1088/1751-8113/41/30/304042

Galvan, S. (1991). *Logiche intensionali. Sistemi proposizionali di logica modale, deontica, epistemica.* Milano: Franco Angeli.

Givant, S. (2006). The Calculus of Relations as a Foundation for Mathematics. *Journal of Automated Reasoning, 37*, 277-322.

Goldstone, J. (1961). Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cimento, 19*, 154–164. doi:10.1007/BF02812722

Goldstone, J., Salam, A., & Weinberg, S. (1962). Broken Symmetries. *Physical Review, 127*, 965–970. doi:doi:10.1103/PhysRev.127.965

Haag, R. (1955). On quantum field theories. *Matematisk-fysiske Meddelelser, 29*(12), 1-37.

Hollands, S., & Longo, R. (2016, September 9). *Non Equilibrium Thermodynamics in Conformal Field Theory.* Retrieved from arXiv:1605.01581v1 [hep-th] 5 May 2016: http://www.arxiv.org

Jónsson, B., & Tarski, A. (1952a). Boolean algebras with operators, Part I. *American Journal of Mathematics, 73*, 891-939.
Jónsson, B., & Tarski, A. (1952b). Boolean algebras with operators, Part II. *American Journal of Mathematics, 74*, 127-152.
Kupke, C., Kurz, A., & Venema, Y. (2004). Stone coalgebras. *Theoretical computer science, 327*, 109-134.
Landsman, K. N. (2017). *Foundations of Quantum Theory. From Classical Concepts to Operator Algebra.* Berlin-New York: Springer.
Lawvere, W. F., & McLarty, C. (2005). An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary. *Theory and Applications of Category, 11*, 1-35. Retrieved from http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/11/tr11.pdf
Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician, 2nd ed.* Berlin-New York: Springer.
Maddux, R. D. (1991). The origin of relation algebras in the development and axiomatization of the calculus of relations. *Studia Logica, 50*(3/4), 421-455.
Moss, L. S. (1999a). Coalgebraic logic. *Annals of Pure and Applied Logic, 96*, 277-317.

Moss, L. S. (1999b). Erratum to “Coalgebraic logic”. [Ann. Pure Appl. Logic 96 (1999) 277-317]. *Annals of Pure and Applied Logic, 99*, 241-259.
Moss, L. S. (2017). *Non-wellfounded set theory.* Retrieved March 10, 2017, from The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.): https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/nonwellfounded-set-theory/
Peirce, C. S. (1886). *One, Two, Three: Kantian Categories. MS [R] 897.* Retrieved May 15, 2016, from Commens Digital Companion to C. S. Peirce. Term: "Firstness": http://www.commens.org/dictionary/term/firstness
Peirce, C. S. (1897). The logic of relatives. *The Monist, 7*(2), 161-217. Retrieved February 29, 2016, from http://www.jstor.org/stable/27897407
Rutten, J. J. (2000). Universal coalgebra: a theory of systems. *Theoretical computer science, 249*(1), 3-80.
Tarski, A. (1941). On the calculus of relations. *Journal of Symbolic Logic, 6*, 73-89.
Tarski, A. (1948). Abstract: Representation Problems for Relation Algebras. *Bulletin of the AMS, 54*, 80.

Tarski, A., & Givant, S. (1987). *A Formalization of Set Theory without Variables.* Providence, RI: American Mathematical Society.

Umezawa, H. (1993). *Advanced field theory: micro, macro and thermal concepts.* New York: American Institute of Physics.

Umezawa, H. (1995). Development in concepts in quantum field theory in half century. *Math. Japonica, 41*, 109–124.

Venema, Y. (2007). Algebras and co-algebras. In P. Blackburn, F. J. van Benthem, & F. Wolter (Eds.), *Handbook of modal logic* (pp. 331-426). Amsterdam, North Holland: Elsevier.

Von Neumann, J. (1955). *Mathematical foundations of quantum mechanics.* Princeton, NJ: Princeton UP.

11. Note

[1] Cfr. L'eccezionale sintesi al riguardo di uno dei più grandi matematici viventi (fra l'altro premio Field nel 1986): M. Atiyah, *Duality in Mathematics and Physics*, lecture notes from the Institut de Matematica de la Universitat de Barcelona (IMUB), 2007. Scaricabile online all'indirizzo: http://www.fme.upc.edu/ca/arxius/butlleti-digital/riemann/071218_conferencia_atiyah-d_article.pdf/view

[2] Cfr. M. H. Stone, «The theory of representation for Boolean algebras,» *Transactions of the American Mathematical Society,* 40(1936), pp. 37-111.

[3] Cfr. A. Kurz & R. Leal, «Modalities in the Stone Age. A Comparison in Coalgebraic Logic», *J. of Theoretical Computer Science,*430(2012), 88-116.

[4] D. SANGIORGI, "Origins of bisimulation and coinduction", in D. SANGIORGI & J. RUTTEN, *Advanced topics in bisimulation and coinduction,* Cambridge UP, Cambridge UK, 2012, 1-37.

[5] Si tratta della voce “Non-wellfounded set theory” curate da L. Moss per la Stanford Encyclopedia of Philosophy, una delle migliori e più aggiornate introduzioni all’argomento: http://plato.stanford.edu/entries/nonwellfounded-set-theory/

7. Bibliografia

Abramsky, S. (2005). A Cook’s Tour of the Finitary Non-Well-Founded Sets (original lecture: 1988). In S. Artemov, H. Barringer, A. d'Avila, L. C. Lamb, & J. Woods (A cura di), *Essays in honor of Dov Gabbay. Vol. I* (p. 1-18). London: Imperial College Pubblications.

Abramsky, S., & Tzevelekos, N. (2011). Introduction to categories and categorical logic. In B. Coecke (Ed.), *New structures for physics. Lecture Notes in Physics, vol. 813* (pp. 3-94). Berlin-New York: Springer.

Aczel, P. (1988). Non-Wellfounded Sets. *CLSI Lecture Notes, vol.14*.

Aczel, P., & Mendler, N. P. (1989). A Final Coalgebra Theorem. *Lecture Notes in Computer Science, 389*, 357-365.

Awodey, S. (2010). *Category Theory. Second Edition (Oxford Logic Guides 52).* Oxford, UK: Oxford UP.

Basti, G. (2002). *Filosofia della Natura e della Scienza. Vol. I: I Fondamenti.* Roma: Lateran University Press.

Basti, G. (2018). From formal logic to formal ontology. The new dual paradigm in natural sciences. In F. M. Bertato, & G. Basti (Eds.), *(Un-)Certainty and (In-)Exactness. Proceedings of the 1st CLE Colloquium for Philosophy and Formal Sciences* (pp. 65-110). Campinas-Rome: Campinas UP-Aracne Edizioni.

Basti, G., Capolupo, A., & Vitiello, G. (2017). Quantum Field Theory and Coalgebraic Logic in Theoretical Computer Science. *Prog. in Bioph. & Mol. Biol. Special Issue: Quantum information models in biology: from molecular biology to cognition, 123*(In Press). Retrieved from preprint on https://arxiv.org/pdf/1701.00527.pdf

Basti, G., Capolupo, A., & Vitiello, G. (2020). The Doubling of the Degrees of Freedom in Quantum Dissipative Systems, and the Semantic Information Notion and Measure in Biosemiotics. *Proceedings, 47*(69), 1-7. doi:0.3390/proceedings47010069

Blackburn, P., De Rijke, M., & Venema, Y. (2002). *Modal logic. Cambridge tracts in theoretical computer science.* Cambridge, UK: Cambridge UP.

Blasone, M., Jizba, P., & Vitiello, G. (2011). *Quantum field theory and its macroscopic manifestations. Boson condensation, ordered patterns and topological defects.* London: Imperial College Press.

Capolupo, A., Freeman, W. J., & Vitiello, G. (2013). Dissipation of dark energy by cortex in knowledge retrieval. *Physics of life reviews, This Issue*.

Cocchiarella, N. B., & Freund, M. A. (2008). *Modal logic. An introduction to its syntax and semantics.* Oxford UK: Oxford UP.

Del Giudice, E., Pulselli, R., & Tiezzi, E. (2009). Thermodynamics of irreversible processes and quantum field theory: an interplay for understanding of ecosystem dynamics. *Ecological Modelling, 220*, 1874-1879.

Ehresmann, A., & Vanbremeersch, J.-P. (2019). MES: A Mathematical Model for the Revival of Natural Philosophy. *Philosophies, 4*(1), 9. doi:10.3390/philosophies4010009

Fraenkel, A. H. (1953). *Abstract Set Theory.* Amsterdam: North Holland Publishing Co.

Fraenkel, A. H., Bar-Hillel, Y., & Levy, A. (1973). *Foundations of Set Theory. Second Revised Edition.* Amsterdam: Elsevier.

Freeman, W. J., & Vitiello, G. (2006). Nonlinear brain dynamics as macroscopic manifestation of underlying many-body field dynamics. *Physics of Life Reviews, 3*(2), 93-118.

Freeman, W. J., & Vitiello, G. (2008). Dissipation and spontaneous symmetry breaking in brain dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41*(30), 304042. doi:10.1088/1751-8113/41/30/304042

Galvan, S. (1991). *Logiche intensionali. Sistemi proposizionali di logica modale, deontica, epistemica.* Milano: Franco Angeli.

Givant, S. (2006). The Calculus of Relations as a Foundation for Mathematics. *Journal of Automated Reasoning, 37*, 277-322.

Goldstone, J. (1961). Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cimento, 19*, 154–164. doi:10.1007/BF02812722

Goldstone, J., Salam, A., & Weinberg, S. (1962). Broken Symmetries. *Physical Review, 127*, 965–970. doi:doi:10.1103/PhysRev.127.965

Goranko, V., & Otto, M. (2007). Model theory of modal logic. In P. Blackburn, F. J. van Benthem, & F. Wolter (Eds.), *Handbook of Modal Logic* (pp. 252-331). Amsterdam: Elsevier.

Haag, R. (1955). On quantum field theories. *Matematisk-fysiske Meddelelser, 29*(12), 1-37.

Hawking, S. W. (2011). *A brief history of time. From big bang to black holes. Updated edition.* New York: Bantam Books.

Hawking, S. W., & Mlodinow, L. (2010). *The grand design.* New York: Bantam Books.

Hollands, S., & Longo, R. (2018, September 9). Non Equilibrium Thermodynamics in Conformal Field Theory. *Comm. in Math. Phys., 357*, 43-60. Retrieved from arXiv:1605.01581v1 [hep-th] 5 May 2016: http://www.arxiv.org

Jónsson, B., & Tarski, A. (1952a). Boolean algebras with operators, Part I. *American Journal of Mathematics, 73*, 891-939.

Jónsson, B., & Tarski, A. (1952b). Boolean algebras with operators, Part II. *American Journal of Mathematics, 74*, 127-152.

Kupke, C., Kurz, A., & Venema, Y. (2004). Stone coalgebras. *Theoretical computer science, 327*, 109-134.

La Palme Reyes, M., MacNamara, J., & Reyes, G. E. (1994). Functoriality and grammatical role in syllogisms. *N. D. Journ. of Symb. Log., 35*(1), 41-66.

Landsman, K. N. (2017). *Foundations of Quantum Theory. From Classical Concepts to Operator Algebra.* Berlin-New York: Springer.

Lawvere, W. F., & McLarty, C. (2005). An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary. *Theory and Applications of Category, 11*, 1-35. Retrieved from http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/11/tr11.pdf

Łukasiewicz, J. (1957). *Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic. Second Enlarged Edition.* Oxford, UK: Oxford UP.

Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician, 2nd ed.* Berlin-New York: Springer.

Maddux, R. D. (1991). The origin of relation algebras in the development and axiomatization of the calculus of relations. *Studia Logica, 50*(3/4), 421-455.

Moss, L. S. (1999). Coalgebraic logic. *Annals of Pure and Applied Logic, 96*, 277-317.

Moss, L. S. (1999b). Erratum to “Coalgebraic logic”. [Ann. Pure Appl. Logic 96 (1999) 277-317]. *Annals of Pure and Applied Logic, 99*, 241-259.

Moss, L. S. (2017). *Non-wellfounded set theory.* Retrieved March 10, 2017, from The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2017 Edition), Edward N. Zalta (ed.): https://plato.stanford.edu/archives/spr2017/entries/nonwellfounded-set-theory/

Nelson, E. (1986). *Predicative Arithmetic (Mathematical Notes 32).* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Nelson, E. (2005). *"Completed versus incomplete infinity in arithmetic". STOQ International Conference on "Infinity in Science Philosophy and Theology", Pontifical Lateran University, Vatican City, January 7-10, 2005.* Tratto il giorno May 30, 2016 da https://web.math.princeton.edu/~nelson/papers/e.pdf.

N-Lab Group. (2019). *Colimits*. Retrieved January 13, 2020, from https://ncatlab.org/nlab/show/colimit

Peirce, C. S. (1886). *One, Two, Three: Kantian Categories. MS [R] 897.* Retrieved May 15, 2016, from Commens Digital Companion to C. S. Peirce. Term: "Firstness": http://www.commens.org/dictionary/term/firstness

Peirce, C. S. (1897). The logic of relatives. *The Monist, 7*(2), 161-217. Tratto il giorno February 29, 2016 da http://www.jstor.org/stable/27897407

Quine, W. V. (1980). *From a Logical Point of View: Nine Logico-Philosophical Essays, Second Revised Edition.* Cambridge MA: Harvard UP.

Quine, W. V. (1983). *Mathematical logic. Revised edition.* Cambridge, MA: Harvard UP.

Rutten, J. J. (2000). Universal coalgebra: a theory of systems. *Theoretical computer science, 249*(1), 3-80.

Sangiorgi , D. (2012). Origins of bisimulation and coinduction. In D. Sangiorgi, & J. Rutten (A cura di), *Advanced topics in bisimulation and coinduction* (p. 1-37). Cambridge, UK: Cambridge UP.

Tarski, A. (1941). On the calculus of relations. *Journal of Symbolic Logic, 6*, 73-89.

Tarski, A. (1948). Abstract: Representation Problems for Relation Algebras. *Bulletin of the AMS, 54*, 80.

Tarski, A., & Givant, S. (1987). *A Formalization of Set Theory without Variables.* Providence, RI: American Mathematical Society.

The Univalent Foundations Program. (2013). *Homotopy Tipe Theory. The Univalent Foundations of Mathematics* . Princeton, NJ: Princeton UP.

Toffano, Z., & Dubois, F. (2020). Adapting logic to physics: the quantum-like eigenlogic program. *Entropy, 22*(139), 139. doi:10.3390/e22020139

Umezawa, H. (1993). *Advanced field theory: micro, macro and thermal concepts*. New York: American Institute of Physics.

Umezawa, H. (1995). Development in concepts in quantum field theory in half century. *Math. Japonica, 41*, 109–124.

Venema, Y. (2007). Algebras and co-algebras. In P. Blackburn, F. J. van Benthem, & F. Wolter (A cura di), *Handbook of modal logic* (p. 331-426). Amsterdam, North Holland: Elsevier.

Von Neumann, J. (1955). *Mathematical foundations of quantum mechanics.* Princeton, NJ: Princeton UP.

Wang, K. (2011, August 26). *Limits, colimits and how to calculate them in the category of modules over a PID.* Tratto il giorno January 13, 2020 da http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2011/REUPapers/WangK.pdf